# **Cálculo** Diferencial e **Integral** II

Ilán Abraham Goldfeder Ortiz
Alejandro Avilés Cervantes

Segunda tarea

Recuerda argumentar todas tus respuestas.

1. Verifica que la derivada de
$$\frac{2}{2-\beta}\arcsin x^{\frac{2-\beta}{2}}$$
es igual a
$$\frac{1}{\sqrt{x^\beta - x^2}}.$$
Encuentra
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^\beta - x^2}},$$
donde $0 < a < b < 1$.

2. Calcula las siguientes integrales:
   (a)
$$\int_0^2 \frac{d^4}{dx^4}(x^2+2x)\,dx$$
   (b)
$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\sqrt{x^3+1}\,dx$$
   (c)
$$\int_1^2 \frac{d}{dx}\sqrt{3x^2-1}\,dx$$

3. Calcula:
   (a)
$$\frac{d}{dt}\int_1^t x^3\,dx$$
   (b)
$$\frac{d}{dt}\int_1^t \frac{dx}{x}$$
   (c)
$$\frac{d}{dt}\int_t^2 \sqrt{x^2+1}\,dx$$
   (d)
$$\frac{d}{dt}\int_0^{t^3} \cos x\,dx$$
   (e)
$$\frac{d}{dt}\int_{-t}^t \sqrt{x^2+2}\,dx$$
   (f)
$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{t^2} \sqrt{x^4+1}\,dx$$
   (g)
$$\frac{d}{dt}\int_{-t}^t \sqrt{x^2+2}\,dx$$
   (h)
$$\frac{d}{dt}\int_{t^2}^{t^3+1} \sqrt{x^2+1}\,dx$$

4. Calcula
$$\int_{-2}^2 -|x|\,dx$$

5. Calcula
   (a)
$$\int x\,dx$$
   (b)
$$\int x^n\,dx$$

(c)
$$\int cx^n\,dx$$
con $c \in \mathbb{R}$ y $n$ entero distinto de $-1$.

(d)
$$\int (ax^n + b)\,dx$$
con $a$, $b \in \mathbb{R}$ y $n$ entero distinto de $-1$.

(e)
$$\int \sin x\,dx$$

(f)
$$\int \cos x\,dx$$

(g)
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

(h)
$$\int \sec^2 x\,dx$$

(i)
$$\int \csc^2 x\,dx$$

(j)
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$
con $a \in \mathbb{R}$

(k)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\,dx$$

(l)
$$\int \sec x \tan x\,dx$$

(m)
$$\int \csc x \cot x\,dx$$

6. ¿Las integrales siguiente son impropias? Si sí, ¿por qué? Verifica si convergen o divergen. Si convergente, calcula su valor.

(a)
$$\int_1^\infty x^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

(b)
$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

(c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

(d)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(e)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^8-x^2}}$$

(f)
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

(g)
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

7. Considera $f : (-\infty,\ \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en cada intervalo cerrado con extremos finitos. Prueba que si $\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$ y $\int_0^\infty f(x)\,dx$ son convergentes entonces $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty f(x)\,dx$ también lo son para todo $a \in \mathbb{R}$ y, además,
$$\int_{-\infty}^\infty f(x), dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$
para todo $a \in \mathbb{R}$.

8. Considera $f$ una función como en el ejercicio anterior y supón que $\int_{-\infty}^\infty f(x), dx$es convergente. Prueba que
$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

9. Considera funciones $f$, $g : [a,\ \infty) \to \mathbb{R}$ tales que tanto $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como $\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergen. Prueba que:

(a)

$$\int_a^\infty (f(x)+g(x))\,dx$$

converge.

(b)

$$\int_a^\infty \alpha f(x)\,dx$$

converge, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Considera funciones $f,\ g : [a,\ b) \to \mathbb{R}$, con $a < b$ tales que tanto $\int_a^b f(x)\,dx$ como $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen. Prueba que:

    (a)

    $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$$

    converge.

    (b)

    $$\int_a^b \alpha f(x)\,dx$$

    converge, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

11. Toma $p \neq 1$ Prueba que la función:

    $$F(x) = \frac{1}{1-p}(\log x)^{1-p}$$

    es una función prmitiva de $\frac{1}{x \log^p x}$ en $(1,\ \infty)$. También prueba que la función:

    $$G(x) = \log(\log x)$$

    es una función primitiva de $\frac{1}{x \log x}$ en $(1,\ \infty)$.

12. Calcula los logaritmos siguientes usando las aproximaciones: $\log 2 = 0.6931$, $\log 3 = 1.0986$ y $\log 10 = 2.3025$. **(No uses calculadora.)**

    (a) $\log 4$
    (b) $\log 15$
    (c) $\log 8$
    (d) $\log 9$
    (e) $\log 12$
    (f) $\log \sqrt{30}$
    (g) $\log \frac{2}{3}$
    (h) $\log \sqrt[4]{72}$
    (i) $\log 0.25$
    (j) $\log \sqrt[3]{1.25}$

13. Toma $a,\ b \in \mathbb{R},\ a,\ b > 0$. Prueba que para todo $x,\ y$ reales se cumplen las igualdades siguientes:

    (a) $a^{x+y} = a^x a^y$
    (b) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
    (c) $(a^x)^y = a^x y (a^y)^x$
    (d) $(a \cdot b)^x = a^x b^x$
    (e) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

14. Con la notación del ejercicio anterior, prueba que si $x \geq 0$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^x < b^x$ Tambien prueba que $a > 1$ entonces $x < y$ si y sólo si $a^x < b^y$.

15. Prueba que si $k$ es cualqueir entero mayor que uno entonces

    $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} < \log k < 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{k-1}$$

16. Utiliza la *regla de la cadena* para mostrar que:

    (a) $(e^{f(x)})' = f'(x)e^{f(x)}$
    (b) $\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

    Siendo $f(x)$ una función derivable en cada punto donde están definidlas las composiciones correspondientes.

17. Deriva las siguientes funciones:

    (a) $\log(3x-2)$
    (b) $\log(\cos x)$
    (c) $\log(2x+3)$
    (d) $\log x^3 + (\log x)^3$
    (e) $\sin \log x$
    (f) $\log \sin x$
    (g) $\frac{\log(e^x+1)}{\log(e^x-1)}$
    (h) $\log(\log x)$