Las coordenadas de cizalla de William Thurston como sombra combinatoria de variedades algebraicas vía álgebra homológica.

Basado en trabajo conjunto con Christof Geiss y Jan Schröer
arXiv:2005.01073

Daniel Labardini Fragoso
Instituto de Matemáticas UNAM

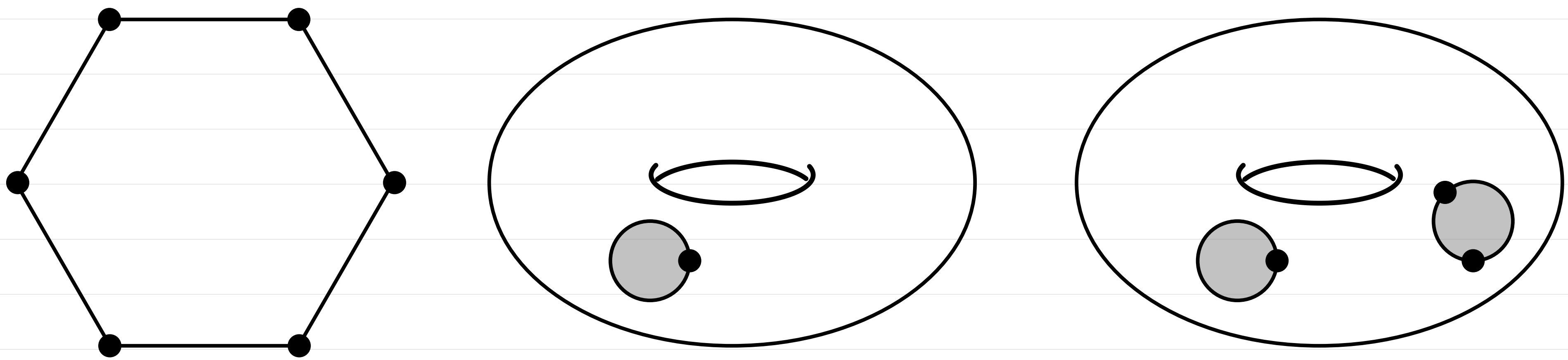
13 de agosto de 2020

§1. Las coordenadas de cizalla de William Thurston

Trabajaremos con superficies con puntos marcados $(\Sigma, \mathbb{M})$

variedad diferenciable real bidimensional compacta, conexa, orientada, con frontera $\partial\Sigma \neq \emptyset$

$\emptyset \neq \mathbb{M} \subseteq \partial\Sigma$ finito, con al menos un punto de cada componente conexa de $\partial\Sigma$



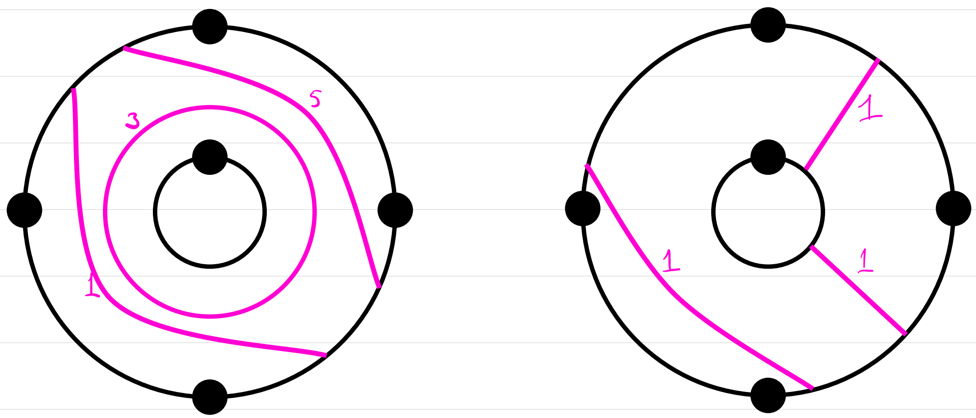
Idea: Centrar nuestra atención en las triangulaciones de Σ que tienen a $\mathbb{M}$ como conjunto de vértices.

Def. Una laminación en $(\Sigma, \mathbb{M})$ es una pareja $\mathbb{L} = (\gamma, m)$ consistente de

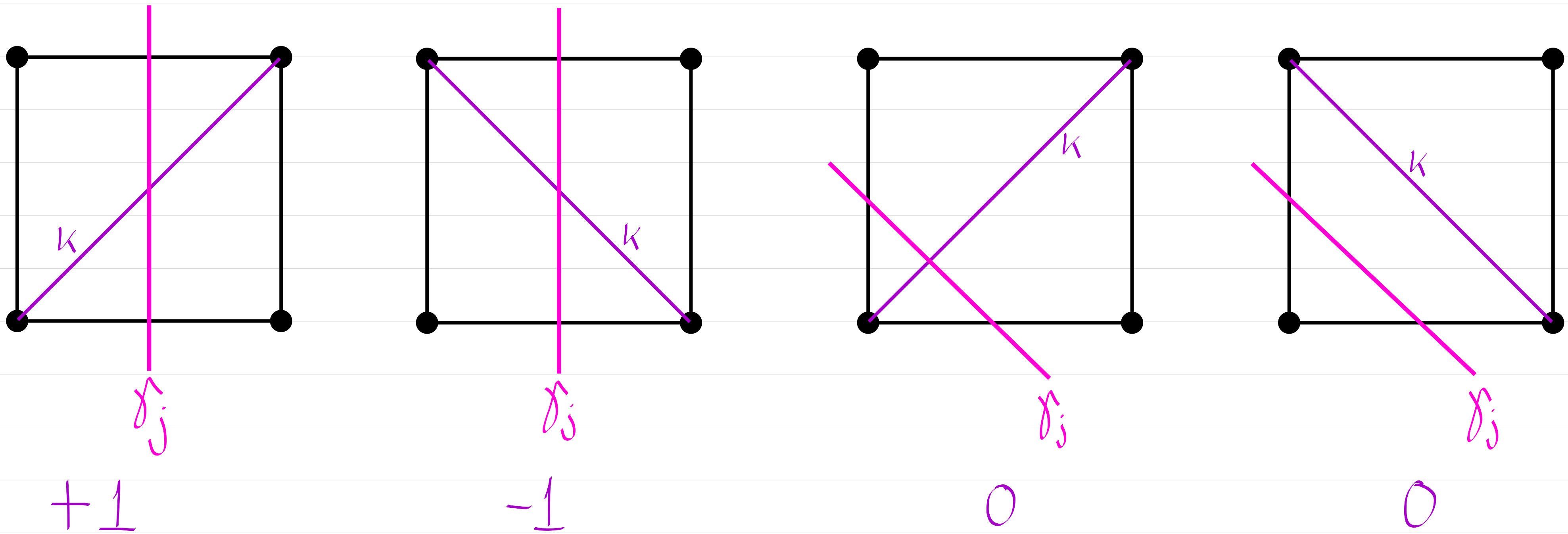
(i) una lista $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell)$ de curvas que no se cruzan, no tocan $\mathbb{M}$, son homotópicamente no triviales en $(\Sigma, \mathbb{M})$, y son no homotópicas unas a otras por pares

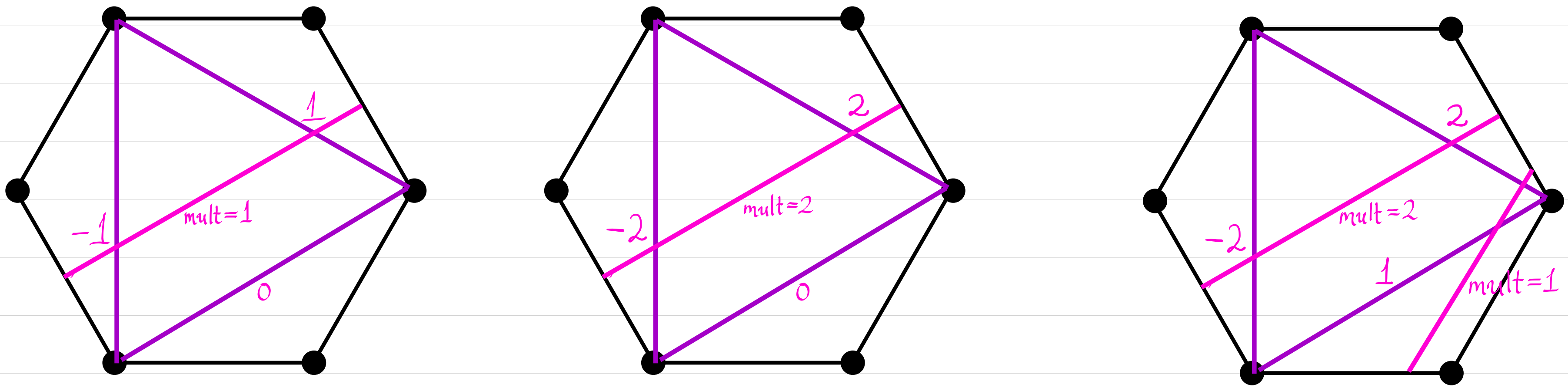
(ii) una lista $m = (m_1, \ldots, m_\ell)$ de enteros positivos

Pensamos en $m_1, \ldots, m_\ell$ como las multiplicidades de $\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell$



Def. (W. Thurston) Las coordenadas de cizalla de una laminación $\mathbb{L} = (\gamma, m)$ con respecto a una triangulación T forman un vector $g_T(\mathbb{L}) = (g_{T,k}(\mathbb{L}))_{k \in T}$ cuyas entradas están definidas por:





Teorema (W. Thurston). Para T fija, la asignación $\mathbb{L} \mapsto b_\tau(\mathbb{L})$ es una biyección $\mathrm{Lam}(\Sigma, \mathbb{M}) \longrightarrow \mathbb{Z}^T$.

§2. Presentaciones proyectivas y un teorema de Plamondon

Fijemos un carcaj $Q=(Q_0, Q_1, s, t)$ y un ideal admisible I del álgebra de caminos $\mathbb{C}\langle Q\rangle$, de manera que la $\mathbb{C}$-álgebra asociativa $A := \mathbb{C}\langle Q\rangle / I$ tiene dimensión finita sobre $\mathbb{C}$.

Def. Tomemos un A-módulo M de dimensión finita, y supongamos que $\bigoplus_{j\in Q_0} P(j)^{b_j} \longrightarrow \bigoplus_{j\in Q_0} P(j)^{a_j} \longrightarrow M \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva minimal de M. El g-vector proyectivo de M es $g_A(M) := (b_j - a_j)_{j\in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$.

Teorema (Plamondon) Tomar g-vectores proyectivos induce una biyección $\operatorname{decIrr}^{\tau}(A) \xrightarrow[1:1]{} \mathbb{Z}^{Q_0}$ cuando $\dim_{\mathbb{C}}(A) < \infty$

Cada vector $\underline{d} = (d_j)_{j \in Q_0} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0}$ tiene asociado el espacio $\mathrm{rep}(A, \underline{d})$ de (listas de) matrices que satisfacen las relaciones impuestas por I y determinan A-módulos con vector de dimensión $\underline{d}$.

$\mathrm{rep}(A, \underline{d})$ es cerrado de Zariski en un espacio afín.

$\mathrm{Irr}(A, \underline{d}) := \{$componentes irreducibles de $\mathrm{rep}(A, \underline{d})\}$

$\mathrm{decIrr}(A, (\underline{d}, \underline{v})) :=$ versión decorada de $\mathrm{Irr}(A, \underline{d})$

$\mathrm{decIrr}^{\tau}(A) := \{$componentes τ-reducidas$\}$

Geiss-Leclerc-Schröer

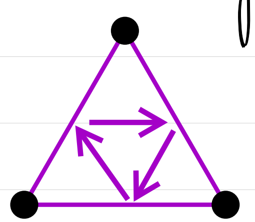
§3. Laminaciones y componentes τ-reducidas

Def. (Assem-Brüstle-Charbonneau-Plamondon, LF)

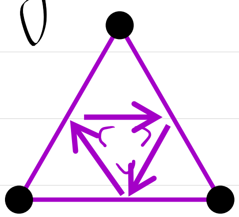
Cada triangulación T de $(\Sigma, \mathbb{M})$ da lugar a una $\mathbb{C}$-álgebra $A(T) := \mathbb{C}\langle Q(T)\rangle / I(T)$ como sigue:

(i) Los vértices del carcaj $Q(T)$ son los arcos en T

(ii) Las flechas de $Q(T)$ están determinadas por los triángulos de T y la orientación de Σ:

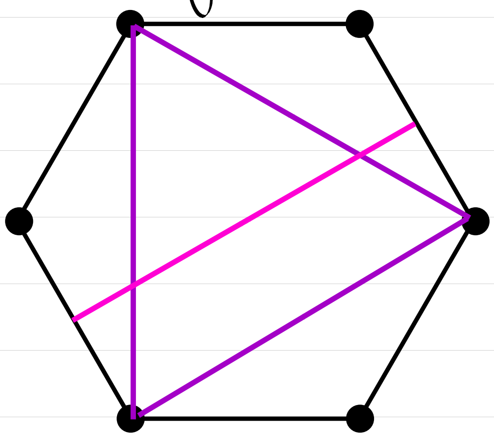


(iii) El ideal bilateral $I(T)$ está generado por los caminos de longitud 2 que están completamente contenidos en triángulos



Def. (Caldero-Chapoton-Schiffler, Assem-Brüstle-Charbonneau-Plamondon, LF)

Cada laminación da lugar a un $A(T)$-módulo $M(T,\mathbb{L})$ como sigue:



T $\mathbb{L}$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dd, "\alpha"] \\
\bullet \arrow[ur, "\beta"] & \\
 & \bullet \arrow[ul, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

$A(T)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} \arrow[dd] \\
\mathbb{C} \arrow[ur, "\mathbb{1}"] & \\
 & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$M(T,\mathbb{L})$

Teorema (Geiss-LF-Schröer)

(i) $M(T,\mathbb{L})$ pertenece a exactamente una componente irreducible $Z_{M(T,\mathbb{L})} \in \mathrm{decIrr}(A(T))$

(ii) $M(T,\mathbb{L}) \in Z^{\circ}_{M(T,\mathbb{L})}$

(iii) $Z_{M(T,\mathbb{L})}$ es τ-reducida, es decir, $Z \in \mathrm{decIrr}^{\tau}(A(T))$

(iv) La asignación $\mathbb{L} \longmapsto Z_{M(T,\mathbb{L})}$ es una biyección

$$\eta_T : \mathrm{Lam}(\Sigma,\mathbb{L}) \longrightarrow \mathrm{decIrr}^{\tau}(A(T))$$

(v) $g_T(\mathbb{L}) = g_{A(T)}(M(T,\mathbb{L}))$, de manera que el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lam}(\Sigma,\mathbb{M}) \arrow[rr, "\eta_T", "1:1"'] \arrow[dr, "1:1"'] & & \mathrm{decIrr}^{\tau}(A(T)) \arrow[dl, "1:1"] \\
& \mathbb{Z}^{T} &
\end{tikzcd}$$

coordenadas de cizalla

g-vector proyectivo genérico

(vi) Nueva prueba del teorema de W. Thurston para $(\Sigma,\mathbb{M})$ con $\mathbb{M} \subseteq \partial\Sigma$

¡Gracias!