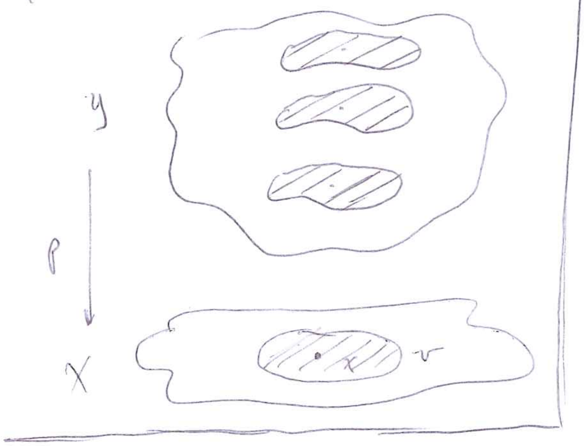
I. Espacios Cubrientes

31 enero '23

· Funciones cubrientes.

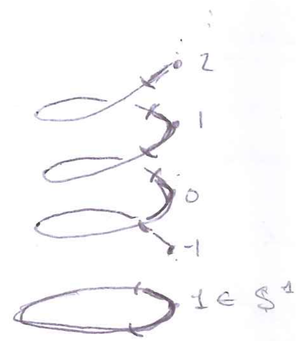
Supondremos que X es un esp. top. localmente conexo.

Definición: Una función cubriente es una función continua $p: Y \to X$ tal que para cada $x \in X$ existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $p^{-1}(V)$ es unión disjunta de abiertos de Y cada uno de los cuales es mandado homeomorfamente sobre V por p.



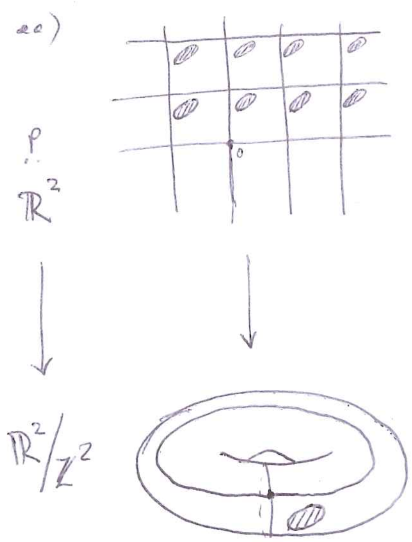
Ejemplos:

i)
$$\begin{tikzcd} p: \mathbb{R} \arrow[r, "t \mapsto t+\mathbb{Z}"] \arrow[dr, "t \mapsto \exp(2\pi i t)"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[d] \\ & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$



~~Observemos que el dibujo de arriba no puede~~

ii)



Definición: Decimos que una función cubriente $p: Y \to X$ es conexa si Y es un espacio conexo.

Lema: Si $p: Y \to X$ es cubriente y X es conexo, entonces todas las fibras de p son homeomorfas a un mismo espacio discreto I.

Por ejemplo, en el ejemplo i), cualquier fibra es homeomorfa a $p^{-1}(1) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración: Denotamos por $I_x := p^{-1}(x)$ para cada $x \in X$. Si V es una vecindad conexa de x ~~tal que p~~ cubierta parejamente por p, se tiene que $p^{-1}(V) \cong V \times I_x$. Para todo punto $y \in V$, se tiene entonces que $V \times I_x \cong V \times I_y \implies I_x \cong I_y$. Luego, se tiene que $A = \{y \in X / p^{-1}(y) \cong I_x\}$ es abierto, y $B = \{y \in X / p^{-1}(y) \not\cong I_x\}$ es unión de abiertos, y por tanto abierto. $\implies$ $A \cap B$ es vacío, pero $x \in A \implies B$ es vacío.

pues X es conexo. $\square$

Definición: Supongamos que Y es un esp. topológico, G es un grupo que actúa en Y mediante homeomorfismos. $\cdot : G \times Y \to Y$. Decimos que la acción es pareja o propiamente discontinua en sentido fuerte si $\forall y \in Y \; \exists \underset{y}{\underset{\Psi}{U}} \subseteq Y$ abto tal que

$$(g \cdot U) \cap (g' \cdot U) = \phi \quad \text{siempre que } g \neq g'.$$

Esto es, $\{ g \in G \,/\, U \cap gU \neq \phi \} = \{ \mathbb{1} \}$.

Lema: Si $\cdot : G \times Y \to Y$ es una acción pareja, entonces la proyección $p : Y \to Y/G$ es una función cubriente, en donde Y/G tiene la topología de identificación ($U \subseteq Y/G$ es abto $\iff p^{-1}(U)$ es abto).

Este lema se sigue de como definimos una acción pareja.

Ejemplos: $\cdot \; \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por translación, $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por translación, nos remiten a los ejemplos $\cdot)$ y $\cdot\cdot)$.

$-)$ Sea $\mu_n := \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z^n = 1 \}$, que actúa por multiplicación en $\mathbb{C}$, y en part. actúa en $\mathbb{C}^*$, en donde la acción es pareja. Ejercicio: mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^* \arrow[r] \arrow[d, "z \mapsto z^n"'] & \mathbb{C}^*/\mu_n \\
\mathbb{C}^* \arrow[ur, "\cong", "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y que φ es homeomorfismo.

$+)$ Si $\Gamma < PSL_2(\mathbb{R})$ es discreto y libre de torsión, entonces $\Gamma \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ es una acción pareja (por transformaciones de Möbius) $\mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$.

Definición: Supongamos que $p : Y \to X$ es cubriente. Un automorfismo de p es un homeomorfismo $\varphi : Y \to Y$ tal que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Observemos que el diagrama implica que φ preserva la fibra de cada $x \in X$. Esto es, φ permuta $p^{-1}(x)$ (como conjunto).

Proposición: Sean X, Y, Z espacios topológicos, Z conexo y $p: Y \to X$ cubriente.
Sean $f,g: Z \to Y$ funciones ~~tales~~ continuas tales que $p \circ f = p \circ g$.
Si existe un $z \in Z$ tal que $f(z) = g(z)$, entonces $f = g$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, shift left, "f"] \arrow[ur, shift right, "g"'] \arrow[r, "p\circ f = p \circ g"'] & X \end{tikzcd}$$

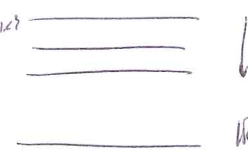
Demostración: Sea $z_0 \in Z$ con $f(z_0) = g(z_0)$, y $A := \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$ y $B = \{z \in Z \mid f(z) \neq g(z)\}$.
Hay que ver que A y B son abiertos.
Para $z \in A$, usamos que $p \circ f = p \circ g$ en un punto x y tomamos $V \ni x$ abierto cubierto parejamente. Sea $y \in Y$ tal que $p^{-1}(x) \ni y$ y U homeomorfo a V con $y \in U$. En $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U)$ se tiene que f y g coinciden, pues $p \circ \underbrace{f = p}_{} \circ g$ (en esencia, usamos la misma inversa local de p para cancelarla en ambos). Similarmente, B es abierto. Puesto que $z_0 \in A$, $A = Z$, pues Z es conexo.

Corolario: Si $p: Y \to X$ es cubriente conexa entonces todo automorfismo de p que fije un punto es 1_Y.

Prop: Si $p: Y \to X$ es cubriente conexa, entonces $\mathrm{Aut}(p) \times Y \to Y$ es pareja.

Ejercicio: ¿Cómo se usa la hipótesis de conexidad en esta prop? Observad corolario previo.

Ejemplo $\mathbb{R} \times \{0,1,2\}$



$\mathbb{R}$

permuta $\mathbb{R} \times \{1\}$ y $\mathbb{R} \times \{2\}$ pero fija $\mathbb{R} \times \{0\}$ es un automorfismo cubriente, pero la acción no es pareja.

Prop Si $G \times Y \to Y$ es pareja con Y conexo, entonces $\mathrm{Aut}(Y \xrightarrow{p} Y/G) \cong G$, canónicamente.

Dem. Lo que es claro es que hay un homomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(p)$ [cada $g \in G$ actúa como un homeo de Y que por definición de Y/G preserva las proyecciones].
Es inyectivo puesto que la acción es pareja. Veamos que es sobre.
Sea $\varphi \in \mathrm{Aut}(p)$ y $y_0 \in Y$, de modo que $p(\varphi(y_0)) = p(y_0)$ por def. y por tanto $\varphi(y_0) \in G \cdot y_0$ (pues p identifica ~~puntos en la misma~~ órbitas)

Luego, $\exists g \in G$ tal que $g\cdot y_0 = \varphi(y_0)$. Luego se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g\cdot -"] \arrow[ur, shift right, "\varphi"'] \arrow[r] & Y/G \end{tikzcd}$$

en donde $g\cdot y_0 = \varphi(y_0)$ y $g\cdot -$, φ son homeomorfismos. La conexidad de Y implica que $\varphi = g\cdot -$.

Así, $G \cong Aut(Y \xrightarrow{p} Y/G)$. $\square$

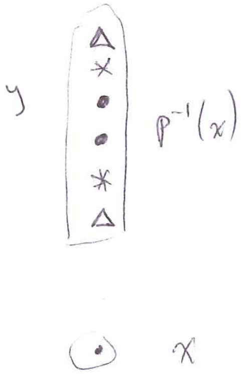
Observación: Si $p: Y \to X$ es una cubriente conexa, tenemos que $Aut(p) \times Y \to Y$ es propia, y por tanto tenemos otra cubriente $q: Y \to Y/Aut(p)$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Y/Aut(p) \arrow[rr, "\exists \bar{p}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "G"] & & X \end{tikzcd}$$

continua, supra, abierta.

Entonces existe una función $\bar{p}: Y/Aut\,p \to X$, pues p es constante en las órbitas de $Aut(p)$, pues tal acción permuta ~~las~~ la fibra de cada $x \in X$.

Es continua y supra, y es abierta puesto que p es abierta y $Y/Aut(p)$ tiene la top. de identificación.



¿Cuándo $\bar{p}$ resulta un homeo?

Definición: Una cubierta conexa $p: Y \to X$ es de Galois si $\bar{p}$ es homeo. [es decir, si $\bar{p}$ es inyectiva].

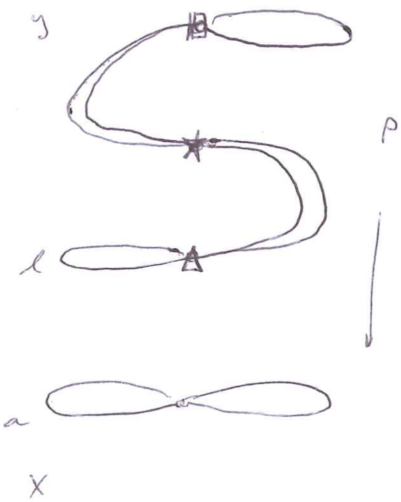
Proposición: Supongamos que $p: Y \to X$ es cubriente conexa. Son equivalentes:

1) p es de Galois
2) $\bar{p}$ es inyectiva
3) $Aut(p)$ actúa transitivamente en cada fibra
4) $Aut(p)$ actúa transitivamente en al menos una fibra.

Dem. Sólo falta ver 4) $\Rightarrow$ 3). Si $\bar{p}$ resulta cubriente terminamos, pues hay una fibra de $\bar{p}$ con sólo un punto, y por tanto toda fibra es un punto, y por tanto ~~tod~~ ninguna ~~órbita~~ fibra de p se descompone en >1 órbitas de $Aut(p)$.

Tarea: ver que $\bar{p}$ es cubriente.

Ejemplo: De una cubriente conexa que no es de Galois: $g \circ f$ $\quad f^{-1} \circ g^{-1} = p^{-1}$



No hay un homeomorfismo que envíe ★ a □. De haberlo, debería enviar lazos en lazos y preservar las fibras. Luego, enviaría el lazo l en algo que ~~se mapea~~ cubre al lazo a, ~~to~~ y no hay tal lazo.

Tarea moral: ¿Cómo se ve $Y/\mathrm{Aut}(p)$ en este ejemplo?

Lema: Supongamos que $g: Z \to X$ es cubriente conexa, y $f: Y \to Z$ es continua. Sea $p := g \circ f$. Si p es cubriente, entonces f es cubriente.

Dem: Idea: tomo vecindades cubiertas parejamente por p y por g en X. Veo que las de Z son cubiertas parejamente de Y, y concluimos que f es cubriente sobre su imagen. Vemos que es suprayectiva usando la conexidad de Z, pues una estrellita en Z es cubierta totalmente por una de g o nada en lo absoluto. Desarrollar.

Teo. Sup. que $p: Y \to X$ es cubriente de Galois. Entonces $\forall H \leq \mathrm{Aut}(p)$:

$p_H: Y/H \to X$ es cubriente intermedia:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d] & X \\ Y/H \arrow[ur, "p_H"'] & \end{tikzcd}$$

(también es cubierta por Y)

Recíprocamente, si $Z \xrightarrow{g} X$ es cubriente conexa que admite un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Z \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

entonces f es cubriente de Galois y de hecho ~~Aut~~ se tiene

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ Y/\mathrm{Aut}(f) \arrow[rr, "\cong"', "\text{homeo}"] & & Z \end{tikzcd}$$

con $\mathrm{Aut}(f) \leq \mathrm{Aut}(p)$

Por último, las funciones

$$H \longleftrightarrow \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p_H"] \arrow[dr, "p"'] & Y/H \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

$H \leq \mathrm{Aut}(p)$

$$\mathrm{Aut}(f) \longleftarrow \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

son biyecciones, y

$H \trianglelefteq \mathrm{Aut}(p) \iff Y/H \to X$ de Galois.