Más sobre la correspondencia tipo Galois

1-Feb-23

Supongamos que $p: Y \to X$ cubriente de Galois (Recordemos que suponemos siempre que X es localmente conexo y, en este caso, Y conexo).

Tomemos $H \trianglelefteq \mathrm{Aut}(p)$. Queremos ver que $p_H : Y/H \to X$ es de Galois.

Tomamos $\varphi \in \mathrm{Aut}(p)$. Buscamos completar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
Y/H \arrow[r, "\bar\varphi"'] & Y/H
\end{tikzcd}$$

Diag 1

Con la ecuación $\varphi h x = h'\varphi(x)$, de manera que obtengamos una $\bar\varphi$ bien definida en Y/H.

Pero H es normal, de forma que hay un h' tal que $\varphi h \varphi^{-1} = h' \in H$.

Vemos además que $\bar\varphi$ es un automorfismo de p_H: esto se sigue del diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] \arrow[ddr, bend right=60, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[d, "q"] \arrow[ddl, bend left=60, "p"] \\
Y/H \arrow[r, "\bar\varphi"'] \arrow[dr, "p_H"'] & Y/H \arrow[d, "p_H"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Como ejercicio, verificar que la asignación $\varphi \longmapsto \bar\varphi$ de $\mathrm{Aut}(p) \longrightarrow \mathrm{Aut}(p_H)$ es un homomorfismo de grupos.

Observemos que si existe un $y \in Y$ para el que $\varphi(y) = h \cdot y$ para cierto $h \in H$, entonces $\varphi \in H$, pues la acción de $\varphi \in \mathrm{Aut}(p)$ está determinada por su valor en un punto de la fibra. Luego, si $\bar\varphi = id_{Y/H}$ entonces $\varphi \in H$, y se tiene que $\mathrm{Núc}(\varphi \mapsto \bar\varphi) = H$.

Veamos que $\boxed{\mathrm{Aut}(p_H) \cong \mathrm{Aut}(p)/H}$ y actúa transitivamente en Y/H.

Si $y_0, y_1 \in Y$, $\cancel{\exists \psi \in A}$ $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(p)$ tal que $\varphi(y_0) = y_1$, luego, por definición de $\bar\varphi$ se tiene que $\bar\varphi([y_0]_H) = [y_1]_H$ (pues está dada por el diagrama 1). Un detalle: la sobreyectividad de $f: \varphi \mapsto \bar\varphi$ se sigue de la unicidad de levantamientos: me fijo en la acción de un $\psi \in \mathrm{Aut}(p_H)$ y lo levanto a un único $\varphi \in \mathrm{Aut}(p)$ con $\psi = \bar\varphi$.

(2)

Supongamos que $q: Z \to X$ es ~~cubriente~~ cubriente y que hay un diagrama conmutativo como el siguiente, con p de Galois. Queremos ver que existe $H \leq \mathrm{Aut}(p)$ para el que hay un diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Z \arrow[rr, "q"'] & G & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[dr, "f"] & \\ Y/H \arrow[rr, dashed, "\sim"] \arrow[dr, "p_H"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Dem: Definamos $H := \mathrm{Aut}(f)$.

Obtenemos el diagrama conmutativo siguiente: para $h \in H$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] \arrow[ddr, bend right=60, "q"'] & Y \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left=60] \\ Z \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr] & Z \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Diag 2

Vemos del diagrama 2 que h es un automorfismo de p. Así, tenemos una función inducida $Y/\mathrm{Aut}(f) \to Z$ dada por el diagrama sig:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[dr, "f"] & \\ Y/\mathrm{Aut}(f) \arrow[rr, "\bar{f}"'] & & Z \end{tikzcd}$$

por lo visto anteriormente, tal función es continua, abierta y ~~suprayectiva~~ cubriente. Si es inyectiva, entonces es un homeomorfismo.

Para ello, notamos que demostrar que $[f(y_0) = f(y_1) \Rightarrow [y_0]_H = [y_1]_H]$ equivale a que $\bar{f}$ es de Galois. Supongamos que $f(y_0) = f(y_1)$ para $y_0, y_1 \in Y$. Entonces $p(y_0) = p(y_1)$, pues $p = q \circ f$. Como p es de Galois, $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(p)$ tal que $\varphi(y_0) = y_1$. Luego, $f(\varphi(y_0)) = f(y_1) = f(y_0)$.

Se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[ur, shift left, "f"] \arrow[ur, shift right, "f\circ\varphi"'] \arrow[r, "p = q\circ f"'] & X \end{tikzcd}$$

de manera que f y $f \circ \varphi$ son levantamientos de $p = q \circ f$ que coinciden en un punto, y por tanto coinciden. Luego, φ es aut. de f, y se tiene $[y_0]_H = [y_1]_H$

Ahora, queremos ver que $\mathrm{Aut}(f) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(p)$ si $q: Z \to X$ es de Galois

Hacemos el diagrama y checamos en un punto.

Quisiéramos que $f \circ \varphi \circ h \circ \varphi^{-1} \overset{?}{=} f$

$\mathrm{Aut}(f)$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[ur, shift left=2, "f\circ\varphi\circ h\circ\varphi^{-1}"] \arrow[r, "p=g\circ f"'] & X \end{tikzcd}$$

Veamos que el diagrama conmuta. Puesto que $\mathrm{Aut}(f) \leq \mathrm{Aut}(p)$ tenemos que $\varphi, h \in \mathrm{Aut}(p)$ y $h \in \mathrm{Aut}(f)$, entonces

$$\underbrace{g\circ f}_{p}\circ\varphi\circ h\circ\varphi^{-1} = \underbrace{p\circ\varphi}_{p}\circ h\circ\varphi^{-1} = p\circ h\circ\varphi^{-1} = p\circ\varphi^{-1} = p.$$

Ahora, tomemos $y \in Y$. Entonces $g(f\circ\varphi\circ h\circ\varphi^{-1}(y)) = g(f(y))$. Puesto que g es de Galois, $\exists\, \psi \in \mathrm{Aut}(g)$ tal que $\psi(f\circ\varphi\circ h\circ\varphi^{-1}(y)) = f(y)$.

Ejercicio: en general, si
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y/H \arrow[ur, "p_H"'] & \end{tikzcd}$$
entonces $\mathrm{Aut}(p_H) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(p)}(H)/H$

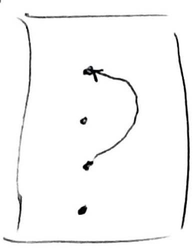
Así, si H no es normal, entonces $\mathrm{Norm}_{\mathrm{Aut}(p)}(H) \neq \mathrm{Aut}(p)$ y la acción no es transitiva (asumiendo que p es de Galois).

Retomamos esto el martes

Grupo fundamental y acción de monodromía

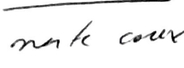
Supongamos $p: Y \to X$ cubierta. Entonces hay una acción derecha. Fijamos $x_0 \in X$.

$$p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$$



La acción está definida como sigue. Sea $y \in p^{-1}(x_0)$, $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ y sea $\lambda_{y,\gamma}$ = levantamiento de γ que comienza en y y definimos $y * \gamma := \lambda_{y,\gamma}(1)$.

[módulo resultado de levantamiento de homotopías].



Teorema: Sup. que X es localmente conexo, conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias, localmente simplemente conexo y supongamos que $p: \tilde{X} \to X$ es cubierta conexa y $\tilde{X}$ simplemente conexo. ~~Entonces para cada $x_0 \in X$ existe~~ Tomemos $x_0 \in X$ y $y_0 \in p^{-1}(x_0)$

Entonces para cada $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ $\exists! \, \varphi_\gamma^{(y_0)} \in Aut(p)$ tal que

$\varphi_\gamma^{(y_0)}(y_0) = y_0 * \gamma$ [Nota: este automorfismo depende de y_0].

¿Cuál es la relación entre $\varphi_\gamma^{(y_0)}$ y $\varphi_\gamma^{(y_1)}$ para $y_0 \neq y_1$ en $p^{-1}(x_0)$.