Funtor de Fibras

$$\mathrm{Fib}_x : \mathrm{Cub}(X) \longrightarrow \mathrm{SET} \quad (\text{Post. en Top})$$

$$(Y, p) \longmapsto p^{-1}(x)$$

Lema: Fib_x es representable.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cub}(X)}(\tilde{X}_x, \cdot) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_x$$

Dem: Sea

$\tilde{X}_x = \{$Clases de homotopía de funciones continuas $f:[0,1] \longrightarrow X$ y $f(0) = x\}$

Topología: $[f] \in \tilde{X}_x$, $y := f(1) \in X$, $U \subseteq X$ vecindad conexa de y definimos

$\tilde{U} = \{[g] \in \tilde{X}_x \mid [g] = [h * f]$ donde $h:[0,1] \longrightarrow U$ y $h(0) = y\}$

Af: Las $\tilde{U}$ forman un sistema de vecindades de $[f]$ y forma una topología.

Cubierta: $p: \tilde{X}_x \longrightarrow X$ $\quad p([f]) := f(1)$

Notemos que $p^{-1}(x) = \pi_1(X, x)$

Af: $p: \tilde{X}_x \longrightarrow X$ es cubierta.

Dem: $y \in X$, $p^{-1}(y) = \{[f] \mid x \xrightarrow{f} y\}$

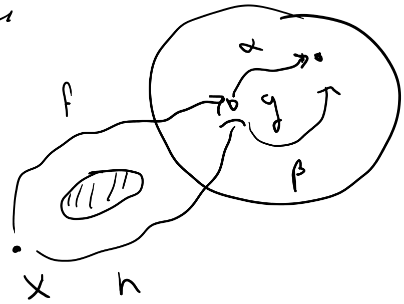
Si $[h]_1$, $[h] \in p^{-1}(y)$ y no son homotópicas, entonces para $U \subseteq X$ suficientemente pequeña, sus vecindades $\tilde{U}_{[f]}$, $\tilde{U}_{[h]}$ son disjuntas

(simpl. conexa) . .

$U \subseteq X$ suf. pequeño, sus ...

(simpl. conexo)

Justificación



pues si U es simplemente conexo y conexo por trayectorias

$p|_{\tilde{U}} : \tilde{U}_{[f]} \longrightarrow U$

es un homeomorfismo.

$\therefore$ p es cubierta.

Lema: $\forall$ cubierta $p : Y \longrightarrow X$ existe una biyección functorial

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cub}(X)}(\tilde{X}_x, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fib}_x(Y, p)$$

martes, 7 de febrero de 2023 10:37 a. m.

Continuación

Supongamos $p: Y \longrightarrow X$ una cubierta de Galois y una cubierta intermedia

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "p"'] \\ Z \arrow[d, "q"] \\ X \end{tikzcd}$$

P.D. Si $q: Z \longrightarrow X$ es de Galois $\Rightarrow \mathrm{Aut}(f) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(p)$

Tomemos $h \in \mathrm{Aut}(f)$ y $\varphi \in \mathrm{Aut}(p)$, P.D. $\varphi h \varphi \in \mathrm{Aut}(f)$ tenemos el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, dotted, "\exists \psi"] \arrow[drr, "q"'] & Z \arrow[r, "1_Z"] \arrow[dr, "q"] & Z \arrow[d, "q"] & Z \arrow[dl, "q"] \\ & & X & \end{tikzcd}$$

Dado $x \in X$ tomemos $z \in q^{-1}(x)$ y $y \in f^{-1}(z)$, notemos

$$q(f \circ \varphi(y)) = x$$

$$y \quad x = p(f(y)) = q(z)$$

Como $q(f(y)) = q(z)$ y q es de Galois $\exists\, \psi \in \mathrm{Aut}(q)$ $\ni$

$$\psi(z) = f \circ \varphi(y)$$

Ahora deseamos ver que $f\varphi = \psi \circ f$, para ello notemos

•) $p = q \circ \psi \circ f$ al aplicar a y $\quad \psi \circ f(y) = \psi(z) = f(\varphi(y))$

$p = q \circ f \circ \varphi$

•) Los levantamientos $\psi \circ f$, $f \circ \varphi$ coinciden en un punto

$p = \psi \circ$

entonces los levantamientos $\psi \circ f$, $f \circ \varphi$ coinciden en un punto

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "\psi \circ f"] \arrow[r, shift right, "f \circ \varphi"'] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ & {} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \psi \circ f = f \circ \varphi$

Obteniendo:

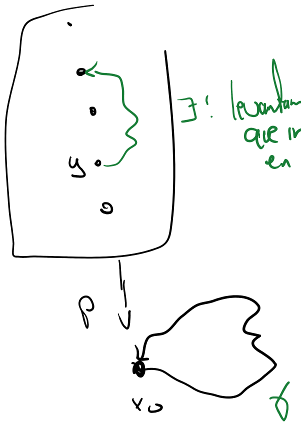
$$f \circ (\varphi^{-1} h \varphi) = \psi^{-1} \circ 1_Z \circ \psi \circ f$$
$$= f \quad \therefore \varphi^{-1} h \varphi \in Aut(f)$$

Sea X conexo por trayectorias, localmente arco-conexo y localmente simplemente conexo. Dado $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ una cubierta simplemente conexa

Fijamos $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 := p(\tilde{x}_0)$, tomamos $q: Y \longrightarrow X$ cualquier cubierta conexa

Sabemos que hay una acción derecha

$$q^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow q^{-1}(x_0)$$

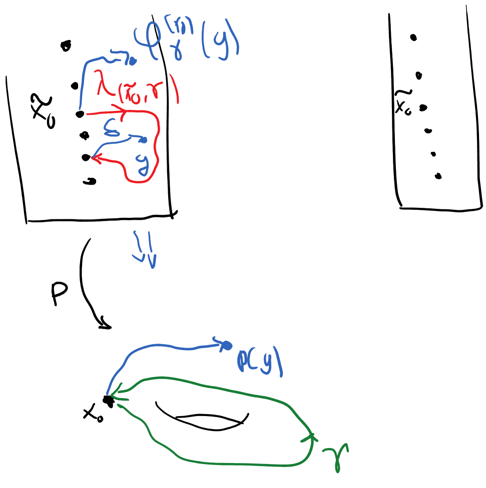


$\exists!$ levantamiento que inicia en y $\quad \lambda_{(y,\gamma)}(1) =: y \cdot [\gamma]$

y no depende de γ.

Teorema: Hay exactamente un $\varphi_\gamma^{(\tilde{x}_0)} \in Act(p)$ tal que

$$\varphi_\gamma^{(\tilde{x}_0)}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 * [\gamma]$$



•) La función

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow Act(p)$$
$$[\gamma] \longmapsto \varphi_\gamma^{(x_0)}$$

Es un isomorfismo.

Dem: Notemos que la construcción cumple

$$p\left(\varphi_\gamma^{(\tilde{x}_0)}(y)\right) = p(y)$$

Considerar $p \circ (\delta_{(\tilde{x}_0, y)})$ y usar el único levantamiento y lo llamamos

$$\varphi_\delta^{(x_0)}(y) := \lambda_{(\tilde{x}_0 \cdot [\gamma],\, p \circ \delta(\tilde{x}_0, y))}$$

Veamos que si tomo $\gamma, \eta \in \pi_1(X, x_0)$ entonces $\varphi_\gamma^{(\tilde{x}_0)} \circ \varphi_\eta^{(\tilde{x}_0)} = \varphi_{\gamma \cdot \eta}^{(\tilde{x}_0)}$ ...... (I)

Pero
$$\varphi_\gamma(\tilde{x}_0 * \eta) = (\tilde{x}_0 * \gamma) * \eta = \varphi_\gamma(x_0) * \eta$$

D Notas para (I)

En particular cuando tomo

$$\varphi_{\gamma^{-1}}^{(\tilde{x}_0)} \circ \varphi_\gamma^{(\tilde{x}_0)} = \varphi_{\bar{\gamma} \circ \gamma}^{(\tilde{x}_0)} = \varphi_{c_{x_0}}^{(\tilde{x}_0)} = \mathrm{Id}_{\tilde{X}}$$

$\therefore$ $\varphi_\gamma^{(\tilde{x}_0)}$ es biyección y es un automorfismo de (p)

Ahora sólo resta ver que $\varphi_\gamma^{(\tilde{x}_0)}$ es continua

Dado $y \in \tilde{X}$, tomemos un abierto $\varphi_\gamma^{(\tilde{x})}(y) \in \tilde{U} \subseteq \tilde{X}$

$V = p(\tilde{U})$, como p es cubierta $\exists$ W abierto de y tal que

$p^{-1}(V) \subseteq W$