

Duodécimo Problema de Hilbert, Invariante Modular Cuántico y Cuasicristales

Tim Gendron

April 22, 2021

Instituto de Matemáticas – Unidad Cuernavaca
Universidad Nacional Autónoma de México

Aritmética

Un **campo numérico** es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$.

Decimos que $\alpha \in K$ es un **K -entero** si su polinomio mínimo

$$m_\alpha(X) \in \mathbb{Q}[X]$$

tiene coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Hecho

El conjunto

$$\mathcal{O}_K = \{K\text{-enteros}\} \subset K$$

es un dominio entero con

$$\text{Frac}(\mathcal{O}_K) = K.$$

Ejemplo

Ejemplo

Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Luego

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\varphi] \supsetneq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

donde $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ es la razón áurica : un entero ya que su polinomio mínimo es $X^2 - X - 1$.

El anillo $\mathcal{O}_K$ es un **dominio de Dedekind**.

En términos prácticos, esto quiere decir que cada ideal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ tiene factorización única en ideales primos

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}}.$$

Si los exponentes $e_{\mathfrak{p}} = 0$ ó 1 para todo $\mathfrak{p}$, decimos que la factorización es **no-ramificada**; sino, se llama **ramificada**.

Extensiones No-Ramificadas

Sea L/K una extensión de campos numéricos. Entonces

$$\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_L.$$

Si $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ es un ideal primo,

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \text{el ideal generado por } \mathfrak{p} \text{ en } \mathcal{O}_L$$

NO es necesariamente primo.

Decimos que L/K es **no-ramificada** en $\mathfrak{p}$ si la factorización primaria de $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ es no ramificada. Si es no-ramificada en cada $\mathfrak{p}$ decimos que L/K es **no-ramificada**.

Campos de Clases

Grupo de Clases de Ideales

Un $\mathcal{O}_K$ -módulo finitamente generado

$$\mathfrak{a} \subset K$$

se llama un **ideal fraccionario**. Con respecto al producto de módulos, el conjunto

$$I_K = \{\text{ideales fraccionarios}\}$$

es un grupo, con identidad $1 := \mathcal{O}_K$ y inverso

$$\mathfrak{a}^{-1} = \{\alpha \in K : \alpha \cdot \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K\}.$$

Los principales $(\alpha) = \alpha\mathcal{O}_K$ forman un subgrupo P_K . El cociente

$$\text{Cl}_K = I_K / P_K$$

se llama el **grupo de clases de ideales**.

Teorema (Minkowski)

Cl_K es finito.

Campo de Clase de Hilbert

Una extensión de Galois L/K es **abeliana** si su grupo de Galois $\text{Gal}(L/K)$ es abeliano.

La máxima extensión abeliana no ramificada de $\mathbf{K}$ se llama el **campo de clase de Hilbert**, denotado

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathbf{K}}.$$

Teorema (Hilbert)

$\mathbf{H}/\mathbf{K}$ es una extensión finita y

$$\text{Gal}(\mathbf{H}/\mathbf{K}) \cong \text{Cl}_{\mathbf{K}}.$$

Campos de Clases de Rayos

Si permitimos ramificación respecto a primos que dividen un ideal fijo $\mathfrak{m}$, se obtiene una generalización del campo de clases de Hilbert

$$\mathbf{H}^{\mathfrak{m}}/K$$

llamado un **campo de clases de rayos**. Si definimos

$$\mathrm{Cl}^{\mathfrak{m}} := \{\mathfrak{a} \in I_K \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = 1\} / \{(\alpha) : \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\},$$

entonces $\mathbf{H}^{\mathfrak{m}}$ se caracteriza por

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{H}^{\mathfrak{m}}/K) \cong \mathrm{Cl}^{\mathfrak{m}}.$$

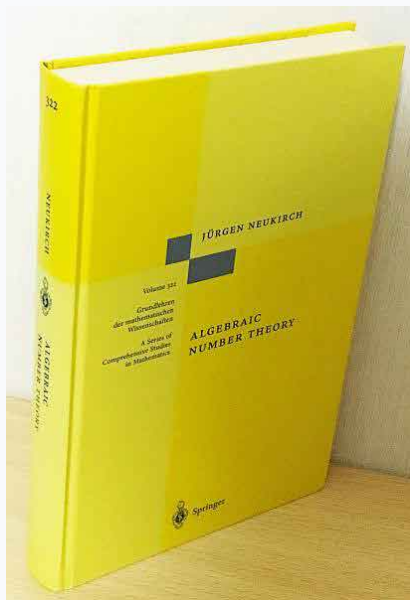
Tenemos

$$K^{ab} = \text{m}{\acute{a}}xima \text{ extensi}{\acute{o}}n \text{ abeliana de } K = \bigcup \mathbf{H}^{\mathfrak{m}}.$$

Teorema (Kronecker-Weber)

$\mathbb{Q}^{(m)} = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, donde ζ_m es un m -esima ra{\'i}z primitiva de 1.

Referencia



Duodécimo Problema de Hilbert

Duodécimo Problema de Hilbert

*Sea K un campo numérico. Describe **explícitamente** todos los campos de clases de K .*

El problema fue inspirado por el Teorema de Kronecker-Weber y el **Teorema de Weber-Fueter**, que trata el caso de $K/\mathbb{Q}$ cuadrática y compleja.

Invariante Modular

Sea $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ y denotemos

$\Lambda_\mu = \langle 1, \mu \rangle$ una retícula en $\mathbb{C}$, $\mathbb{T}_\mu = \mathbb{C}/\Lambda_\mu$ un toro (curva elíptica).

El **invariante modular** de μ es

$$j(\mu) = \frac{12^3}{1 - J(\mu)}, \quad J(\mu) = \frac{49}{20} \frac{G_\mu(6)^2}{G_\mu(4)^3}$$

donde

$$G_\mu(k) = \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda_\mu} \lambda^{-k}.$$

$j(\mu)$ depende solo en la clase de isomorfismo de $\mathbb{T}_\mu \Rightarrow$ induce una función en el **espacio de moduli** de curvas elípticas

$$j : \text{Mod} := \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \backslash (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

donde $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ por transformaciones de Möbius.

Multiplicación Compleja

Si $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ es cuadrático, la curva elíptica $\mathbb{T}_\mu = \mathbb{C}/\Lambda_\mu$ tiene

Multiplicación Compleja (MC):

$$\mathbb{Z} \subsetneq \text{End}(\mathbb{T}_\mu) \subset \mathcal{O}_K \subset \mathbb{C},$$

donde $K = \mathbb{Q}(\mu)$.

Teorema de Weber-Fueter

Sea $K/\mathbb{Q}$ compleja y cuadrática, $\mu \in K - \mathbb{Q}$. Entonces

1 $H = K(j(\mu)).$

2 Sea $\mu \in K$ tal que $\text{End}(\mathbb{T}_\mu) = \mathcal{O}_K$. Entonces

$$H^m = H_K(\eta(t) : 0 \neq t \in \mathbb{T}_\mu[m]),$$

donde η es un múltiplo de la función $\wp$ de Weierstrass y

$$\mathbb{T}_\mu[m] = \text{grupo de } m\text{-torsion} = \{x \in \mathbb{T}_\mu : m \cdot x = 0\}.$$

Una Cita Notable

La teoría de Multiplicación Compleja, que forma una vinculación poderosa entre la teoría de números y el análisis, no es solamente la parte más hermosa de las matemáticas sino de toda la ciencia.

– David Hilbert, ICM, Zürich, 1932.



On the History of Hilbert's Twelfth Problem

A Comedy of Errors

Norbert Schappacher*

Abstract

Hilbert's 12th problem conjectures that one might be able to generate all abelian extensions of a given algebraic number field in a way that would generalize the so-called theorem of Kronecker and Weber (all abelian extensions of $\mathbb{Q}$ can be generated by roots of unity) and the extensions of imaginary quadratic fields (which may be generated from values of modular and elliptic functions related to elliptic curves with complex multiplication). The first part of the lecture is devoted to the false conjecture that Hilbert made for imaginary quadratic fields. This is discussed both from a historical point of view (in that Hilbert's authority prevented this error from being corrected for 14 years) and in mathematical terms, analyzing the algebro-geometric interpreta-

Programa de Multiplicación Real (Yuri Manin, 2004)

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\Lambda_\theta = \langle 1, \theta \rangle$. El cociente

$$\mathbb{T}_\theta = \mathbb{R}/\Lambda_\theta$$

se llama un **toro cuántico**. El **espacio de moduli** asociado es

$$\text{Mod}^{\text{qt}} := \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \backslash (\mathbb{R} - \mathbb{Q}).$$

Programa de Multiplicación Real

Sea $K/\mathbb{Q}$ cuadrática y real. Encontrar el análogo del Teorema de Weber-Fueter usando $\mathbb{T}_\theta$ donde $\theta \in K - \mathbb{Q}$.

Obstáculo Serio: $\mathbb{T}_\theta$ y Mod^{qt} son ambos espacios *no Hausdorff*
 $\Rightarrow$ no cuentan con funciones continuas no constantes.

Real Multiplication and Noncommutative Geometry (ein Alterstraum)

Yu. I. Manin

- 0 Introduction: Lattices, Elliptic Curves, and Complex Multiplication
 - 1 Pseudolattices, Quantum Tori, and Real Multiplication
 - 2 Stark's Numbers and Theta Functions for Real Quadratic Fields
 - 3 Heisenberg Groups, Modules over Quantum Tori, and Theta Functions
- Bibliography

Invariante Modular Cuantico

Invariante Modular Cuántico (Castaño Bernard - Gendron)

Dado $\theta \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ definimos los ε **aproximaciones diofánticas**

$$\Lambda_{\theta,\varepsilon} := \{n \in \mathbb{Z} : \|n\theta\| < \varepsilon\}, \quad \|x\| = \text{distancia al entero mas cercano.}$$

La ε **función zeta** de θ es

$$\zeta_{\theta,\varepsilon}(s) = \sum_{0 < n \in \Lambda_{\theta,\varepsilon}} n^{-s}.$$

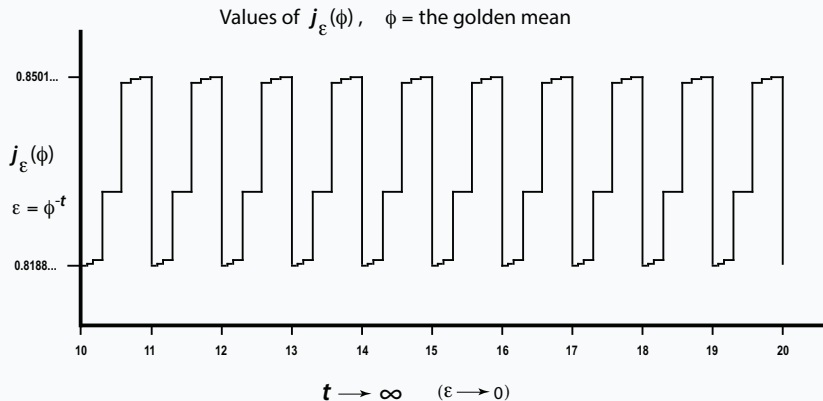
Escribamos

$$j_{\varepsilon}(\theta) = \frac{12^3}{1 - J_{\varepsilon}(\theta)}, \quad J_{\varepsilon}(\theta) = \frac{49}{40} \frac{\zeta_{\theta,\varepsilon}(6)^2}{\zeta_{\theta,\varepsilon}(4)^3}.$$

El **invariante modular cuántico** es la función discontinua y multi-valuada

$$j^{\text{qt}} : \text{Mod}^{\text{qt}} \multimap \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad j^{\text{qt}}(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j_{\varepsilon}(\theta).$$

Evidencia Experimental



Experimentos con PARI-GP (Zagier, Pink) sugirieron que j^{qt} es 1-a-Cantor para θ una unidad cuadrática fundamental (demostrado por Gendron-Leichtnam-Lochak (2020)).

Modular invariant of quantum tori

C. Castaño-Bernard and T. M. Gendron

ABSTRACT

The modular invariant j^{qt} of quantum tori is defined as a discontinuous, $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ -invariant multi-valued map of $\mathbb{R}$. For $\theta \in \mathbb{Q}$ it is shown that $j^{\text{qt}}(\theta) = \infty$. For quadratic irrationalities, experiments conducted with the PARI/GP computer algebra system suggest that $j^{\text{qt}}(\theta)$ is a finite set. In the case of the golden mean φ , we produce explicit formulas for the experimental supremum and infimum of $j^{\text{qt}}(\varphi)$ involving weighted versions of the Rogers–Ramanujan functions. Finally, we define a universal modular invariant as a continuous and single-valued map of ultrasolenoids from which j^{qt} as well as the classical modular invariant of elliptic curves may be recovered as subquotients.

Contents

1. The quantum modular invariant of a real number	1017
2. Modular invariant of the golden mean I: an explicit formula	1019
3. Modular invariant of the golden mean II: convergence	1025
4. Quantum tori and Kronecker foliations	1027
5. Nonstandard structures	1030
6. Diophantine approximation groups	1032
7. Ultrasolenoids	1035
8. Eisenstein ultratransversals	1038
9. The universal modular invariant	1040
10. Appendix: Experimental Values of J^{qt}	1045
References	1048

Conjetura Principal

Sea $K/\mathbb{Q}$ cuadrática y real, $\theta \in \mathcal{O}_K^\times$ una **unidad cuadrática fundamental** : i.e. un generador del factor infinito cíclico de

$$\mathcal{O}_K^\times \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

(el isomorfismo sigue del **Teorema de Unidades de Dirichlet**).

Conjetura (Demangos-Gendron)

$$H = K \left(\prod_{\alpha \in j^{\text{qt}}(\theta)} \alpha \right),$$

donde el producto es una “esperanza multiplicativa” sobre el conjunto de Cantor $j^{\text{qt}}(\theta)$.

Solución para Campos de Funciones

Campos de Funciones sobre un Campo Finito

$\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ = el campo con $q = p^n$ elementos.

$$\mathbf{Q} := \mathbb{F}(T) = \text{Rac}(\mathbb{P}^1) \supset \mathbf{Z} := \mathbb{F}[T] = \text{Reg}(\mathbb{P}^1 - \infty).$$

Sea $|\cdot|_\infty$ el valor absoluto **no arquimediano** en ∞ :

$$|g|_\infty = q^{\text{ord}_\infty(g)}.$$

Los “reales” y “complejos” son:

$$\mathbf{R} := \mathbf{Q}_\infty = \text{completación de } \mathbf{Q} \text{ c.r.a. } |\cdot|_\infty$$

y

$$\mathbf{C} := (\overline{\mathbf{R}})_\infty,$$

donde $\overline{\mathbf{R}}$ = cerradura algebraica de $\mathbf{R}$.

El **invariante modular de Gekeler**

$$j : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}) \backslash (\mathbf{C} - \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{C},$$

se define

$$j(\mu) = \frac{T^q - T}{1 + J(\mu)}, \quad J(\mu) = \frac{T^{q^2} - T}{T^{q^2} - T^q} \cdot \frac{\mathbf{G}_\mu(q^2 - 1)}{\mathbf{G}_\mu(q - 1)^{q+1}}$$

donde

$$\mathbf{G}_\mu(k) = \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda_\mu} \lambda^{-k}, \quad \Lambda_\mu = \mathbf{Z}\text{-módulo generado por } 1, \mu.$$

Usando su invariante modular, Gekeler demostró el análogo del Teorema de Weber-Fueter para extensiones cuadráticas complejas de $\mathbf{Q}$ usando **módulos de Drinfeld** de rango 2 con Multiplicación Compleja.

Math. Ann. 262, 167–182 (1983)

**Mathematische
Annalen**

© Springer-Verlag 1983

Zur Arithmetik von Drinfeld-Moduln

Ernst-Ulrich Gekeler

Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik, Berlingstraße 4, D-5300 Bonn,
Bundesrepublik Deutschland

0. Einleitung

In [4] hat Drinfeld eine Theorie der Modulkurven für globale Funktionenkörper entwickelt. Er betrachtet „Gitter“ in einem universellen analytischen Körper der Charakteristik $\neq 0$ und gibt diesen eine algebraische Interpretation. („Elliptische Moduln“, hier als Drinfeld-Moduln bezeichnet.) Aus dem Vergleich der analyti-

Invariante Modular Cuántico en Característica Positiva

Sea $f \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Se puede definir el **grupo** de aproximaciones diofánticas

$$\Lambda_{f,\varepsilon} = \{a \in \mathbf{Z} : \|af\| < \varepsilon\},$$

y

$$\zeta_{f,\varepsilon}(k) = \sum_{0 \neq a \in \Lambda_\varepsilon(f) \text{ mónico}} a^{-k}.$$

Usando el invariante modular de Gekeler como plantilla definimos $\mathbf{j}_\varepsilon(f)$ y

$$\mathbf{j}^{\text{qt}} : \text{GL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Teorema (Demangos-Gendron)

Si f es cuadrático, $\#\mathbf{j}^{\text{qt}}(f) < \infty$.

Arch. Math. 107 (2016), 159–166
© 2016 Springer International Publishing
0003-889X/16/020159-8
published online June 25, 2016
DOI 10.1007/s00013-016-0920-4

Archiv der Mathematik



CrossMark

Quantum j -invariant in positive characteristic II: formulas and values at the quadratics

L. DEMANGOS AND T. M. GENDRON

Abstract. In this sequel to Demangos and Gendron (Arch Math 107:23–35, 2016), the multi-valued quantum j -invariant in positive characteristic is studied at quadratic elements. For every quadratic f , an explicit expression for each of the values of $j^{\text{qt}}(f)$ is given as a limit of rational functions of f . It is proved that the number of values of $j^{\text{qt}}(f)$ is finite.

Mathematics Subject Classification. Primary 11R58, 11F03, 11R11; Secondary 11K60

Teorema Principal

Sea $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ cuadrático sobre $\mathbf{Q}$, $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ = los $\mathbf{K}$ -enteros. Sea $\mathbf{H}$ el campo de clases de Hilbert.

Teorema Principal (Demangos-Gendron)

Sea $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{\times}$ una unidad fundamental. Entonces

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} \left(\prod_{\alpha \in \mathbf{j}^{\text{qt}}(f)} \alpha \right).$$

Selecta Mathematica (2021) 27:13
<https://doi.org/10.1007/s00029-021-00619-4>

Selecta Mathematica
New Series



Quantum modular invariant and Hilbert class fields of real quadratic global function fields

L. Demangos¹ · T. M. Gendron²

Accepted: 11 November 2020 / Published online: 26 February 2021

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature Switzerland AG part of Springer Nature 2021

Abstract

This is the first of a series of two papers in which we present a solution to Manin's Real Multiplication program (Manin in: Laudal and Piene (eds) *The Legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, Berlin, 2004)—an approach to Hilbert's 12th problem for real quadratic extensions of $\mathbb{Q}$ —in positive characteristic, using quantum analogs of the modular invariant and the exponential function. In this first paper, we treat the problem of Hilbert class field generation. If $k = \mathbb{F}_q(T)$ and k_∞ is the analytic completion of k , we introduce the quantum modular invariant

$$j^{\text{qt}} : k_\infty \dashrightarrow k_\infty$$

Un teorema de generación de campos de clases de rayos se encuentra en este artículo:

QUANTUM DRINFELD MODULES II: QUANTUM EXPONENTIAL AND RAY CLASS FIELDS

L. DEMANGOS AND T.M. GENDRON

ABSTRACT. This is the second in a series of two papers presenting a solution to Manin's Real Multiplication program [10] in positive characteristic. If K is a quadratic and real extension of $\mathbb{F}_q(T)$ and $\mathcal{O}_K$ is the integral closure of $\mathbb{F}_q[T]$ in K , we associate to each modulus $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}_K$ the *unit narrow ray class field* $K^{\mathfrak{M}}$; a class field containing the narrow ray class field, whose class group contains an additional contribution coming from $\mathcal{O}_K^\times$. For $f \in K$ a fundamental unit, we introduce the associated *quantum Drinfeld module* ρ_f^{qt} of f : a generalization of Drinfeld module whose elements are multi-points. The main theorem of the paper is that

$$K^{\mathfrak{M}} = H_{\mathcal{O}_K}(\text{Tr}(\rho_f^{\text{qt}}[\mathfrak{M}]), \text{Tr}(\rho_{f^{-1}}^{\text{qt}}[\mathfrak{M}]))$$

where $H_{\mathcal{O}_K}$ is the Hilbert class field of $\mathcal{O}_K$ and $\text{Tr}(\rho_f^{\text{qt}}[\mathfrak{M}]), \text{Tr}(\rho_{f^{-1}}^{\text{qt}}[\mathfrak{M}])$ are the groups of traces of $\mathfrak{M}$ torsion points of $\rho_f^{\text{qt}}, \rho_{f^{-1}}^{\text{qt}}$.

Elementos de la Demostración

$\mathbf{K}/\mathbf{Q}$ se induce por un morfismo de curvas definidas sobre $\mathbb{F}$

$$\pi : \Sigma_{\mathbf{K}} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{donde } \mathbf{K} \subset \mathbf{R} \text{ implica } \pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}.$$

Tenemos que

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \text{Reg}(\Sigma_{\mathbf{K}} - \{\infty_1, \infty_2\}).$$

Por el Teorema de Unidades de Dirichlet,

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{\times} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{F}_q^{\times}.$$

$\therefore$ Cada encaje de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ en $\mathbf{R}$ tiene imagen **densa**. $\Rightarrow$ el cociente $\mathbf{R}/\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ es un toro cuántico.

Anillos de Enteros Chicos

En el contexto de campos de funciones hay **anillos de enteros chicos**:

$$A_{\infty_i} := \text{Reg}(\Sigma_K - \infty_i) \subset \mathcal{O}_K, \quad i = 1, 2,$$

cada uno dando su propio campo de clases de Hilbert:

$$\begin{array}{c} H_{A_{\infty_i}} \\ | \\ H_K. \end{array}$$

En este caso $A_{\infty_i}^\times \cong \mathbb{F}_q^\times \Rightarrow$ existen encajes **discretos**

$$A_{\infty_i} \hookrightarrow R.$$

El cociente R/A_{∞_i} , llamado **módulo de Drinfeld**, es un objeto geométrico manejable.

Identificación de $j^{\text{qt}}(f)$

Por ser discreto en $\mathbf{R}$, cada ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbf{A}_{\infty_1}$ define una función zeta convergente

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(k) = \sum_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{a} \text{ mónico}} \alpha^{-k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

con la cual se puede definir el **invariant modular**

$$\mathbf{j} : \text{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Escribiendo $\text{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q}) = \{\text{id}, \sigma\}$, el conjunto

$$\mathfrak{a}_i = \{g \in \mathbf{K} \mid |\sigma(g)|_{\infty_1} < q^{-i}\} \subset \mathbf{A}_{\infty_1} = \{g \in \mathbf{K} \mid |\sigma(g)|_{\infty_1} \leq 1\}$$

es un ideal para cada $i = 0, 1, \dots$.

Teorema (Demangos-Gendron)

Si $f \in \mathbf{K}$ es unidad fundamental y $|f|_{\infty_1} = q^d$, $d > 0$,

$$j^{\text{qt}}(f) = \{j(\mathfrak{a}_i)\}_{i=0}^{d-1}.$$

Teoría Cuasicristalina de Números

Un Teorema de Richard Pink

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ una unidad cuadrática fundamental, $K = \mathbb{Q}(\theta)$, $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{\text{id}, \sigma\}$. Para $x \in \mathbb{R}$ consideremos el analogo de $\mathfrak{a}_i$,

$$\mathfrak{a}_x = \{\alpha \in \mathcal{O}_K : |\sigma(\alpha)| < \theta^{-x}\}.$$

$\mathfrak{a}_x \subset \mathbb{R}$ es discreta $\Rightarrow$ se puede definir el invariante modular $j(\mathfrak{a}_x)$ usando la función zeta convergente

$$\zeta_{\mathfrak{a}_x}(s) := \sum_{0 < \alpha \in \mathfrak{a}_x} \alpha^{-s}.$$

Teorema (Pink, comunicación privada, octubre 2017)

$$j^{\text{qt}}(\theta) = \{j(\mathfrak{a}_x)\}_{x \in [0,1]}.$$

Además, los $\mathfrak{a}_x$ son **cuasicristales**.

Definición (Yves Meyer)

Un **cuasicristal**

$$\Lambda \subset \mathbb{R}^n$$

es un **conjunto de Delaunay** (i.e. un subconjunto relativamente denso y uniformemente discreto) que es una casi retícula: existe $F \subset \mathbb{R}^n$ finito tal que

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F.$$

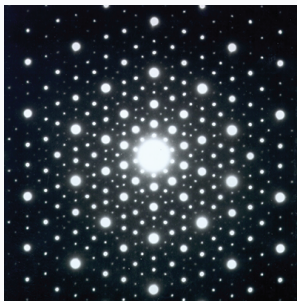
Teselaciones de Penrose

El conjunto de vertices de una **teselación de Penrose** es un cuasicristal.



Cuasicristales Físicos

En 1984, Dan Schectman creó un el laboratorio un aleación de aluminio y manganeso cuya estructura atomica no es cristalina sino cuasicristalina. Por este descubrimiento, recibió el premio Nobel en 2011.



El Teorema de Pink sugiere que el análogo del anillo chico $\mathbf{A}_{\infty_1}$ es el **anillo cuasicristalino**

$$A_{\sigma_1} := \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\sigma(\alpha)| \leq 1\}$$

(un quasicristal que es monoïde multiplicativo) y el análogo de los ideales $\mathfrak{a}_i$ es la familia

$$\mathfrak{a}_x \subset A_{\sigma_1}$$

de **ideales cuasicristalinos**.

Nota

A_{σ_1} consiste de los números de Pisot y Salem en K , y sus negativos.

En el contexto de campos de funciones, los cocientes

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{C}/\alpha, \quad \alpha \subset \mathbf{A}_{\infty_1} \text{ un ideal}$$

juegan el papel de “curvas elípticas de rango 1”. Hay un mapeo aditivo, el exponencial,

$$\exp_\alpha : \mathbf{T}_\alpha \xrightarrow{\cong} \mathbf{C}$$

que induce la estructura de $\mathbf{A}_{\infty_1}$ -módulo sobre $\mathbf{C}$, llamado **módulo de Drinfeld**.



Módulos de Drinfeld Cuasicristalinos

Para $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x$ consideremos la cerradura

$$\hat{S}_{\mathfrak{a}} := \overline{\{r + \mathfrak{a} : r \in \mathbb{R}\}}$$

dentro del espacio de cuasicristales de dimension 1. Tiene la estructura de un **solenóide** de dimensión 1 – un espacio localmente modelado sobre

$$\mathbb{R} \times \text{Cantor}.$$

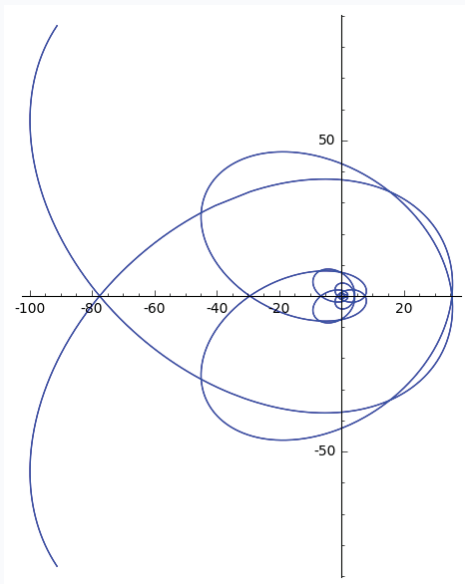
Además tiene **Multiplicación Cuasicristalina**: una acción por A_{σ_1} por endomorfismos cuasicristalinos. Existe un mapeo exponencial

$$\exp_{\mathfrak{a}} : \hat{S}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

que define una “casi A_{σ_1} estructura” sobre su imagen

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{a}} = \text{módulo de Drinfeld cuasicristalino}.$$

Un Módulo de Drinfeld Cuasicristalino Áureo



MODULES DE DRINFELD QUASICRISTALLINS

T.M. GENDRON, E. LEICHTNAM, AND P. LOCHAK

ABSTRACT. Dans cet article nous développons la notion de *module de Drinfeld quasicristallin*, que l'on peut voir comme un analogue en caractéristique zéro des modules de Drinfeld classiques. On prendra garde que l'adjectif se réfère aux quasi-cristaux (au sens de [23]), sans rapport avec la théorie cristalline initiée par A. Grothendieck.

CONTENTS

Introduction	1
1. Bref résumé de la théorie de Drinfeld-Hayes	4
2. Anneaux et idéaux quasicristallins	6
3. Monoïdes des classes d'idéaux quasicristallins	9
4. La fonction zêta d'un idéal quasicristallin	17
5. L'invariant modulaire quantique et un résultat de R. Pink	23
6. Le solénoïde associé à un quasicristal	25
7. Fonction exponentielle et modules de Drinfeld quasicristallins	33
References	38

Desarrollar la teoría de módulos de Drinfeld cuasicristalinos

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$$

con Multiplicación Cuasicristalina.

Utilizarla para adaptar la prueba del Teorema Principal a la Conjetura

$$H = K\left(\prod_{\alpha \in j^{\text{qt}}(\theta)} \alpha\right) = K\left(\prod_{x \in [0,1)} j(\mathfrak{a}_x)\right)$$