DUODÉCIMO PROBLEMA DE HILBERT, INVARIANTE MODULAR CUÁNTICO Y CUASICRISTALES

T.M. GENDRON

1. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión finita. El *Duodécimo Problema de Hilbert* pide una descripción explicita de extensiones especiales de K, en particular el *campo de clase de Hilbert*:

$$H_K = \text{ la maxima extensión no-ramificada y abeliana de } K.$$

En la formulación de este problema, Hilbert se inspiró por la Teoría de *Multiplicación Compleja* y el

Teorema de Weber-Fueter. *Si $K = \mathbb{Q}(\mu)$ donde μ es cuadrática y compleja,*

$$H_K = K(j(\mu)),$$

donde $j(\mu)$ es el invariante modular de la curva elíptica con reticula $\langle 1, \mu\rangle$.

Hasta la fecha, no hay más casos resueltos del Duodécimo Problema.

2. Sea $K = \mathbb{Q}(\theta)$, donde θ es cuadrática y real. Yuri Manin sugerió en 2004 que debe de existir una teoría complementaria que llamó *Multiplicación Real*, que se aplica a los "toros cuánticos" $\mathbb{R}/\langle 1, \theta\rangle$. Motivado por esta idea, definimos (con Carlos Castaño Bernard, 2014) el *invariante modular cuántico*

$$j^{\mathrm{cu}} : \mathbb{R}/\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \multimap \mathbb{R},$$

una función multivaluada y discontinua en el espacio de moduli de toros cuánticos. Para θ cuadrática y real, $j^{\mathrm{cu}}(\theta)$ es un conjunto de Cantor.

Conjectura (Demangos-Gendron)**.** *$H_K = K(\prod_{x\in j^{\mathrm{cu}}(\theta)} x)$, donde $\prod_{x\in j^{\mathrm{cu}}(\theta)} x$ es un promedio multiplicativo de los multi-valores de $j^{\mathrm{cu}}(\theta)$.*

3. Demostramos (con Luca Demangos, 2016) el análogo de esta conjetura en el caso de campos de funciones sobre campos finitos. La prueba usa análogos 1-dimensionales de curvas elípticas llamados *modulos de Drinfeld*. Entonces, para poder adaptar nuestra prueba en el caso de campos de funciones al caso de campos numéricos, se require un analogo de modulo de Drinfeld para campos numéricos. Siguiendo una observación de Richard Pink, argumentamos (con Éric Leichtnam y Pierre Lochak, 2019) que el análogo buscado consiste de una clase de solenoides 1-dimensional asociados a los cuasicristales multiplicativos en $\mathbb{R}$. (Las *teselaciones de Penrose* dan ejemplos de cuasicristales en dimensión 2.) Terminamos por discutir el desarrollo de la hipotética *teoría cuasicristalina de números*, que se necesitará para completar este programa.

Instituto de Matemáticas – Unidad Cuernavaca, Universidad Nacional Autonoma de México, Av. Universidad S/N, C.P. 62210 Cuernavaca, Morelos, México

Email address: tim@matcuer.unam.mx

Date: March 26, 2021.