Bases y abanicos de Gröbner

Lara Bossinger

Área de investigación: Algebra conmutativa, geometría algebraica, geometría poliedral
Requisitos: Teoría de grupos, campos y anillos, algebra conmutativa
Estudiantes que pueden trabajar en el proyecto: 4
Productos propuestos: Poster o ensayo científico

Resumen: Una idea central en geometría algebraica y álgebra conmutativa es la de estudiar sistemas de ecuaciones polinomiales en varias variables. Desde el punto de vista computacional, encontrar soluciones explícitas para estos sistemas puede ser una tarea difícil. La teoría de las bases de Gröbner ayuda precisamente a encontrar soluciones a estos sistemas de manera algorítmica. En vista de la ubicuidad de problemas científicos modelados por ecuaciones polinomiales, este tema es de interés no solo para los matemáticos pero también para un número en ascenso de ingenieros y científicos. Más precisamente, sea J un ideal en el anillo de polinomios $k[x_1,\dots,x_n]$ sobre un campo k algebraicamente cerrado. Tomamos un orden total $\succ$ en los monomios de $k[x_1,\dots,x_n]$. Así podemos definir la *forma inicial* $\mathrm{in}_\succ(f)$ de un polinomio $f \in k[x_1,\dots,x_n]$: es el monomio máximal con respeto al orden. El *ideal inicial* $\mathrm{in}_\succ(J)$ es el ideal generado por las formas iniciales de todos los elemento en J. Una *base de Gröbner* para J con respeto a $\succ$ es un conjunto finito de generadores de J tales que sus formas iniciales generan al ideal inicial.
Ejemplo: Sea J el ideal generado por x^2+xy y y^3+x^2 en $k[x,y]$. Definimos el orden total: $x^ay^b \succ x^cy^d$ si y solo si $a \geq c$, o $a = c$ y $b > d$. Entonces, $\mathrm{in}_\succ(x^2+xy) = x^2$ y $\mathrm{in}_\succ(y^3+x^2) = x^2$. Pero el conjunto $\{x^2+xy, y^3+x^2\}$ no es una base de Gröbner, porque la forma inicial del elemento $xy - y^3 = (x^2+xy) - (y^3+x^2) \in J$ no se encuentra en el ideal generado por $\mathrm{in}_\succ(x^2+xy)$ y $\mathrm{in}_\succ(y^3+x^2)$. Una base de Gröber de J con respeto a $\succ$ es, por ejemplo, $\{y^3+x^2, x^2+xy, xy-y^3\}$.

(1) **El calculo de las bases de Gröbner.** En este proyecto tratamos la pregunta praćtica: ¿ Cómo podemos calcular una base de Gröbner de un ideal? Hay dos algoritmos centrales que dan respuestas: el algoritmo de división y el algoritmo de Buchberger. Se trata de entender, explicar y aplicar los dos algoritmos. Para calcular ejemplos más avanzados el uso del programa Macaulay2 va a ser útil.

(2) **Abanicos de Göbner.** Las ideales iniciales de un ideal $J \subset k[x_1,\dots,x_n]$ estan organizadas en un abanico en $\mathbb{R}^n$. En el caso que J es un ideal homogéneo el abanico de Gröbner es el abanico normal de un politopo que se llama el *politopo de estado*. Esta parte del proyecto se enfoca en el estudio de la relación entre el politopo de estado y en abanico de Gröbner para ideales J que son primos y generados por binomios.

(3) **Valuaciones y politopos de Newton–Okounkov.** Desde pocos años se descubrió una relación intima entre un subabanico del abanico de Gröber, se llama la *tropicalización*, y valuaciones en el anillo cociente $A = k[x_1,\dots,x_n]/J$. Una valuación en un mapeo $v : A - \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ tal que para todos los $f, g \in A$:

$$v(cf) = v(f) \forall c \in k, v(fg) = v(f)v(g), \text{ y } v(f+g) \preceq \min\{v(f), v(g)\}.$$

Aqui $\preceq$ se refiere a un orden total fijo en $\mathbb{Z}^d$. Si v comple algunas propiedades bonitas se puede asociar un politopo, el *politopo de Newton–Okounkov*, a v que captura mucha información sobre v y A. Las valuaciones con esas propiedades y sus politopos de Newton–Okounkov se construyen de manera muy sencilla desde conos máximo especiales de la tropicalización del ideal J.

Lecturas recomendadas:

- Cox, David A.; Little, John; O'Shea, Donal: Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Fourth edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2015. xvi+646 pp. ISBN: 978-3-319-16720-6;
- Herzog, Jürgen; Hibi, Takayuki: Monomial ideals. Graduate Texts in Mathematics, 260. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. xvi+305 pp. ISBN: 978-0-85729-105-9

Referencias de los proyectos de investigación.

(1) §2 en el libro "Monomial Ideals" de Herzog y Hibi, o §2 en el libro "Ideals, varieties, and algorithms" de Cox, Little y O'Shea.

(2) §13 y 14 en el libro "Lectures in Geometric Combinatorics" de Rekha R. Thomas, disponible en https://pdfs.semanticscholar.org/d3f5/8fdc340ce964cbf7ab59a4d2be1c9e4fae88.pdf

(3) §2-5 del articulo "Khovanskii bases, higher rank valuations and tropical geometry" de Kiumars Kaveh y Christopher Manon, disponible en https://arxiv.org/pdf/1610.00298v2.pdf

Detalles sobre los proyectos:

(1) **El calculo de las bases de Gröbner:** El objetive de este tema es entender y aplicar el algoritmo de Buchberger para encontrar bases de Gröbner y más precisamente *bases de Gröbner reducidas*. Referencias son, por ejemplo, el libro de Herzog–Hibi y el libro de Cox–Little–O'Shea. El siguiente ejemplo es una posibilidad para aplicar el algoritmo: Sea $I = (xy - z2, xz - z2, yz - z2)$ en $P = K[x, y, z]$.
   (a) Para $<$ un orden de términos (*term order*) tal que $x > z$ y $y > z$ muestra que la $<$-base de Gröbner reducida de I es $\{xz - z^2, yz - z^2, xy - z^2\}$;
   (b) Para $<$ un orden de términos tal que $x > z$ y $z > y$ muestra que la $<$-base de Gröbner reducida de I es $\{xy - yz, xz - yz, z^2 - yz\}$;
   (c) Para $<$ un orden de términos tal que $y > z$ y $z > x$ muestra que la $<$-base de Gröbner reducida de I es $\{z^2 - xz, yz - xz, xy - xz\}$;
   (d) En la situación que $<$ en un orden de términos tal que $z > y$ y $z > y$ muestra que hay dos posibilidades para la base de Gröbner reducida dependiendo si $x > y$ o $y > x$. Muestra que en los dos cases la $<$-base de Gröbner reducida tiene cuatro elementos.
   (e) Muestra que existen exactamente cinco bases de Gröbner reducidas para I y define un ordene de términos para cada base;

   Para los cálculos se puede usar `Macaulay2`[1]. En particular, las funciones `MonomialOrder`[2] y `leadTerm`[3] pueden ser útiles.

   *Este tema se puede profundizar y aplicar en varias maneras para escribir una tesis de licenciatura o maestría:
   (a) **Coloraciones de graficas:** la referencia es De Loera "Gröbner bases and graph colorings" (1995);
   (b) **Discubriendo teoremas geometricos:** las referencias son Manubens–Montes "Minimal canonical comprehensive Groebner systems" (2009) y Montes–Recio "Automatic discovery of geometric theorems using minimal canonical comprehensive Groebner systems" (2007);

(2) **Abanicos de Gröbner:** El primer objetivo es leer entender y explicar en sus propios palabras el capitulo §2 de Sturmfels' "Gröbner Bases and Convex Polytopes". En particular, el Teorema 2.5 y el Corolario 2.9. La segunda parte es la aplicación de los resultados teóricos. Usando `Macaulay2` se puede calcular el *politopo de estados* (definido en (2.8) del libro) con la función `statePolytope`[4]. Para esta segunda parte pueden escoger sus propios ejemplo o alternativamente tomar el siguenite: Sea I el ideal de 2×2-minores de una matriz de 2×4 cuyas entradas son los variables $x_{i,j}$ con $1 \leq i \leq 2$ y $1 \leq j \leq 4$ de un anillo de polinomios. El caso más sencillo de 2×2-minores de una matriz de 2×3 se encuentra en el mismo libro.
   (a) Calcula una base de Gröbner *universal* $\mathcal{U}$ para este ideal;
   (b) Calcula los politops de Newton para cada elemente de $\mathcal{U}$ y despues calcula la suma de Minkowski P de todos los politopos de Newton;
   (c) Calcula el politopo de estados de I y verfica que es isomorfo al politopo P;
   (d) Describe el abanico de Gröbner de I, ¿cuantos conos maximales tiene? ¿Tiene un subespacio lineal? Describe sus rayos y su F-vector.

   Para los calculos con politopos de puede usar el package `Polyhedra`[5] de `Macaulay2` o el programa `polymake`[6]

   *Este tema se puede extender de varias maneras para escribir una tesis de licenciatura:
   (a) **Ideales tóricos:** en el caso que el ideal sea *tórico* (es decir generado por binomios y primo) el abanico de Gröbner se puede calcular de manera más fácil. Además ideales tóricos son muy simétricos y como consecuencia hay mucha combinatoria relacionada al tema. Una referencia para seguir seria el libro de Thomas (ver (2) en la lista de referencias).

(3) **La tropicalización de la 3×3-determinante:** Adentro del abanico de Gröbner de un ideal se encuentra la *tropicalización* del mismo ideal como subabanico. Más precisamente, es la colección de todos los conos cuyos ideal inicial no contiene ningún monomio. En este proyecto van a estudiar el abanico de Gröbner del ideal definido por la determinante de una matriz 3×3 y su tropicalización. Pues el ideal es generado por solo un elemento, entonces su abanico de Gröbner es el abanico normal del politopo de Newton de la determinante. Las siguentes preguntas son de interés:
   (a) ¿Cuantos conos maximales tiene el abanico de Gröbner y cuantos tiene la tropicalización?

---

[1] Esta disponible para download en `http://www2.macaulay2.com/Macaulay2/` o para usarlo en linea en `http://habanero.math.cornell.edu:3690/`

[2] `www2.macaulay2.com/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/___Monomial__Order.html`

[3] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/_lead__Term.html`

[4] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/StatePolytope/html/_state_Polytope.html`

[5] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Polyhedra/html/index.html`

[6] `https://www.polymake.org/doku.php/download/start`

(b) ¿Cuales conos maximales de la tropicalización son caras de cada cono maximal de abanico de Gröbner?
(c) ¿Existen ideales iniciales en la tropicalización que son primos?
(d) ¿Cuales son las simetrías del ideal y de su abanico de Gröbner?
(e) ¿Hay conos simpliciales?

*Este tema se puede profundizar de varias maneras para una tesis de maestría o un articulo de investigación:
(a) para *variedades de determinantes* (i.e. conjuntos de ceros de) de **minores de una matriz** $3 \times n$;
(b) para la variedad de **determinante de una matriz** $n \times n$;
Las variedades de determinantes son de interés porque aparecen mucho en la geometría algebraica. Un ejemplo prominente es la *variedad de Segre* isomorfa a un producto de dos espacios proyectivos. Muchas variedades proyectivas más (despues de un cambio de su encaje) son variadades de determinantes y probar resultados de este estilo es parte de la investigación actual en la geometría algebraica.

(4) **La variedad de bandera degenerada y las variedades de Schubert:** En este poyecto se estudia el ideal de Plücker $I_n \subset \mathbb{C}[p_I : I \subsetneq \{1, \dots, n\}]$ que define la variedad de bandera Fl_n en el producto de $n-1$ espacios proyectivos. Feigin ha introducido la *variedad de bandera degenerada* que se puede expresar en términos de ideales iniciales: existe un vector de peso w tal que la variedad de bandera degenerada es el conjunto de ceros del ideal inicial $in_w(I_n)$. Nos interesa que pasa con los variedades de Schubert bajo esta degeneración. Las variedades de Schubert X_v son subvariedades de la variedad de bandera y existen para cada $v \in S_n$, el grupo simétrico. Tienen con gran importancia para la teoría de las representaciones y la topología de Fl_n. Podemos definir las variedades X_v como conjunto de ceros de un ideal $I_v = I_n + J_v$ donde J_v es un ideal generado de variables. Hay un intercambio profundo entra la combinatoria y las variedades X_v: más precisamente existe un orden parcial (el *orden de Bruhat*) en el grupo simétrico que determina cuales son las variables que generan el ideal J_v. Las preguntas de interés son las siguientes:
(a) ¿Para cual $v \in S_n$ tenemos $in_w(I_v) = in_w(I_n) + (p_I)_{i \not\leq v}$?
(b) Equivalente a 1: ¿cuando es $\{R^k_{J,L}\}_{k,J,L} \cup \{p_I\}_{I \not\leq v}$ una base de Gröbner para I_v con respeto a w?
(c) Dado $v \in S_n$, ¿existe un orden monomial $<_w$ que refine w tal que $\{R^k_{J,L}\}_{k,J,L} \cup \{p_I\}_{I \not\leq v}$ es una base de Gröbner para I_v y $<_w$?
(d) ¿Para cual $v \in S_n$ tenemos que $in_w(I_v)$ es un ideal primo?
(e) ¿Para cual $v \in S_n$ tenemos que $in_w(I_v)$ es generado de binomios?
(f) ¿Para cual $v \in S_n$ tenemos que $w \in Trop(I_v)$?

(5) * **Valuaciones y politopos de Newton–Okounkov:** En este proyecto hay dos opciones: se puede trabajar con un enfoque en la teoría o con un enfoque en la aplicación. En el caso ideal se puede realizar los dos enfoques. El objetivo teórico es entender y aplicar la construcción de valuaciones y sus politopos de Newton–Okounkov dado un cono máximo y primo en la tropicalización de un ideal homogéneo. Se encuentra en el articulo de Kaveh y Manon. Los prerrequisitos están en las secciones §2.1 sobre valuaciones, partes de §2.2 sobre bases de Khovanskii, §2.3 sobre politopos de Newton–Okounkov y §3.3 sobre la tropicalización. En la sección §4.1 se encuentra la construcción de *casi-valuaciones de pesos* que en el caso que nos interesa son las valuaciones queridas. Finalmente en la sección §5.1 se encuentran la Proposición 5.2 y el Corolario 5.6(1) que contienen los resultados de interés. El objetivo aplicado es calcular la tropicalización del ideal generado por la determinante de una matriz 3×3. Este abanico contiene seis conos máximos y primos para los cuales uno puede calcular el politopo de Newton–Okounkov asociado. El uso de `Macaulay2` con el package `Tropical`[7] es necesario para desarrollar esta aplicación con mucho detalle.

[7] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2-1.12/share/doc/Macaulay2/Tropical/html/`