

La diversidad de las álgebras de conglomerado

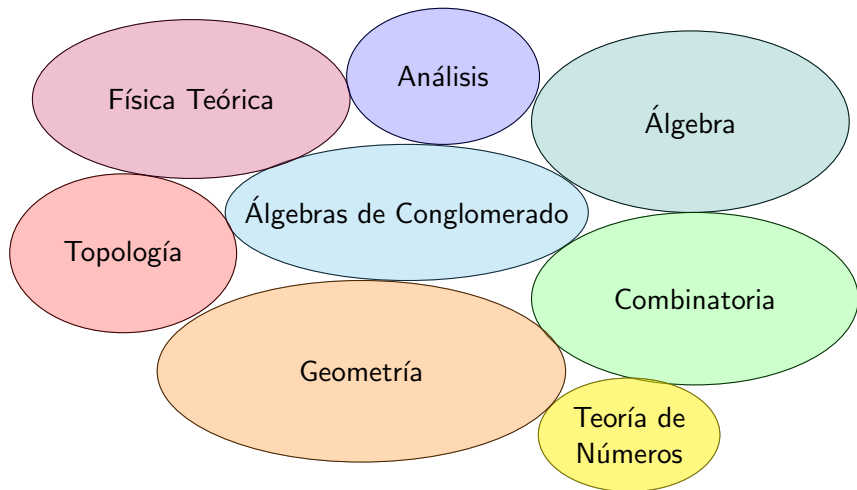
Lara Bossinger



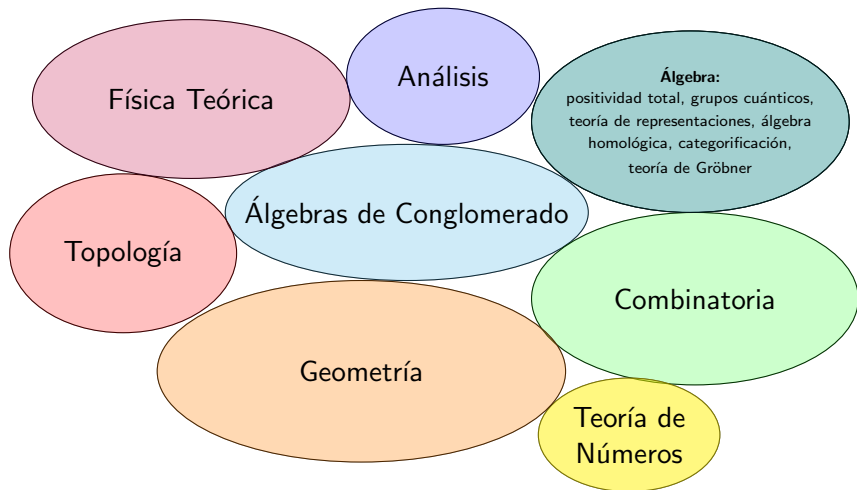
Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

3er EMMM 17 de noviembre 2021

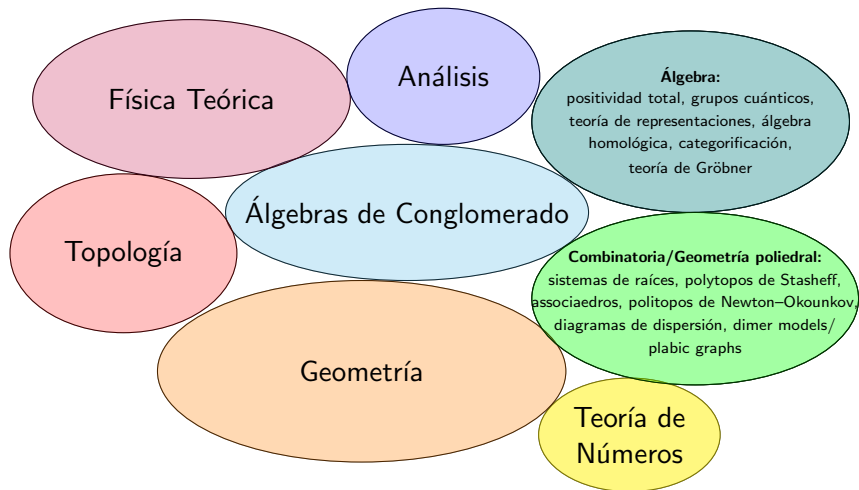
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



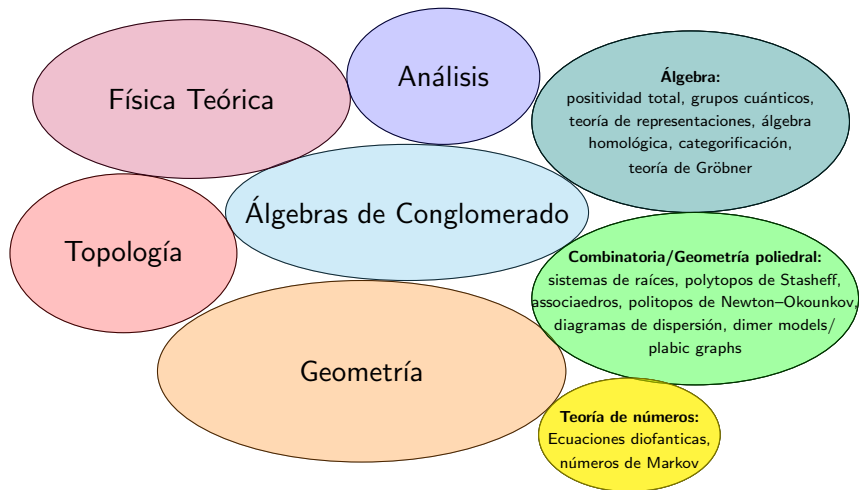
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



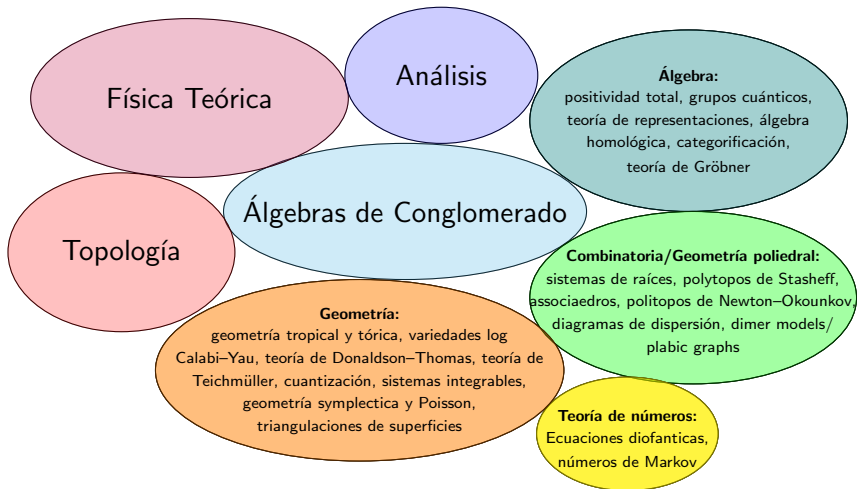
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



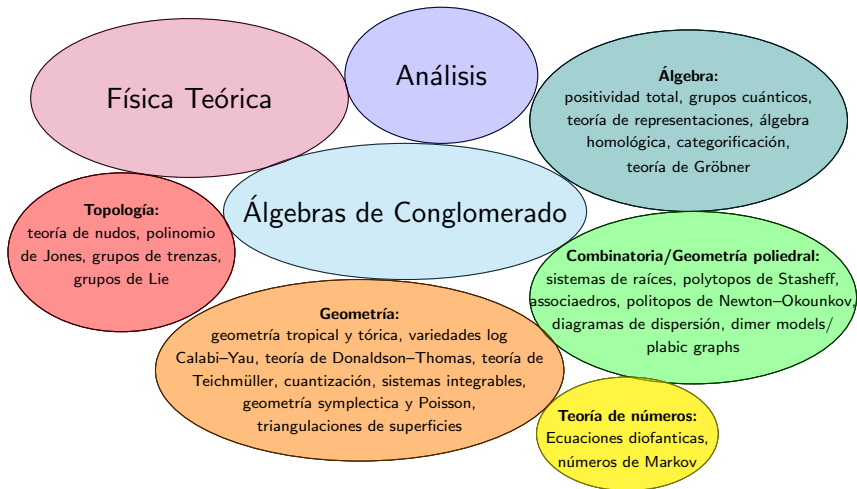
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?

Análisis

Física teorica:

teoría de cuerdas, simetría especular, amplitudes de dispersión, teoría de campos conformes, Ansatz de Bethe en la termodinámica

Álgebra:

positividad total, grupos cuánticos, teoría de representaciones, álgebra homológica, categorificación, teoría de Gröbner

Topología:

teoría de nudos, polinomio de Jones, grupos de trenzas, grupos de Lie

Álgebras de Conglomerado

Geometría:

geometría tropical y tórica, variedades log Calabi–Yau, teoría de Donaldson–Thomas, teoría de Teichmüller, cuantización, sistemas integrables, geometría symplectica y Poisson, triangulaciones de superficies

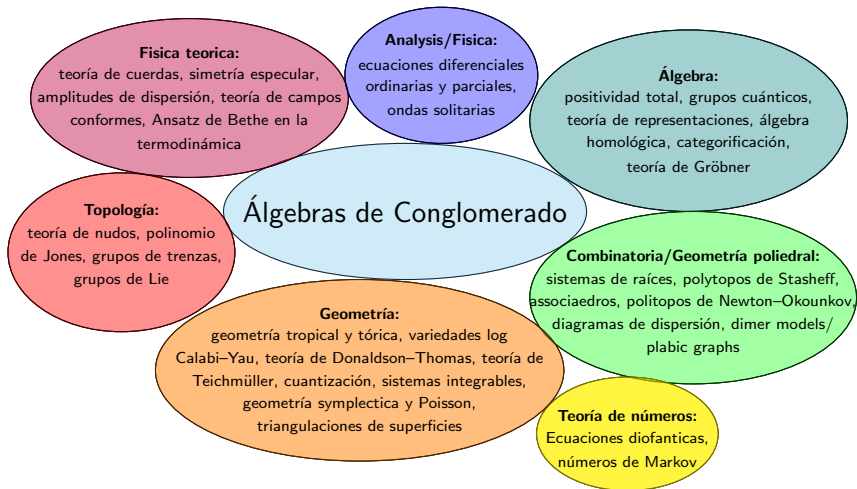
Combinatoria/Geometría poliedral:

sistemas de raíces, polytopos de Stasheff, associaedros, politopos de Newton–Okounkov, diagramas de dispersión, dimer models/plabic graphs

Teoría de números:

Ecuaciones diofánticas, números de Markov

¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



Historia

- Dos rusos Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky definieron las álgebras de conglomerado en 2001



©<http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin>



©<https://opc.mfo.de>

- Observaron la *estructura de conglomerado* en la teoría de positividad total de matrices, en grupos cuánticos y sus bases canónicas.
- Los algebristas de la teoría de representaciones fueron muy emocionados por el nuevo concepto.
- Pocos las álgebras de conglomerado se encuentran en varias áreas y ahora tienen su propia clasificación 13F60
- Ahora hay más que 1,755 artículos y desde 2003 había más que 139 eventos sobre el álgebra de conglomerado

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = 1, \quad p_{23} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = 1, \quad p_{23} = 6, \quad p_{24} = \det \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 10$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = 1, \quad p_{23} = 6, \quad p_{24} = 10, \quad p_{34} = \det \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = 1, \quad p_{23} = 6, \quad p_{24} = 10, \quad p_{34} = 2.$$

Observamos: $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = p_{13}p_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = 1, \quad p_{23} = 6, \quad p_{24} = 10, \quad p_{34} = 2.$$

Observamos: $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = p_{13}p_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ cumple $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = p_{13}p_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$p_{12} = 2, \quad p_{13} = 1, \quad p_{14} = 1, \quad p_{23} = 6, \quad p_{24} = 10, \quad p_{34} = 2.$$

Observamos: $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = p_{13}p_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ cumple $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = p_{13}p_{24}$.

Pregunta: ¿Como podemos verificar *eficientemente* si M es totalmente positiva o no?

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{34} > 0$. Pues, en este caso también

$$p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} > 0.$$

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{34} > 0$. Pues, en este caso también

$$p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} > 0.$$

El conjunto $\{p_{13}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34}\}$ se llama un *test de positividad*.

Pregunta: ¿Como podemos encontrar los tests de positividad?

El origen del algebra de conglomerao: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{34} > 0$. Pues, en este caso también

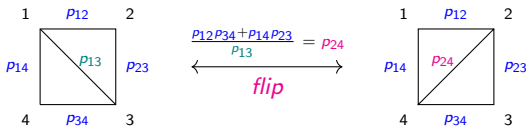
$$p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} > 0.$$

El conjunto $\{p_{13}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34}\}$ se llama un *test de positividad*.

Pregunta: ¿Como podemos encontrar los tests de positividad?

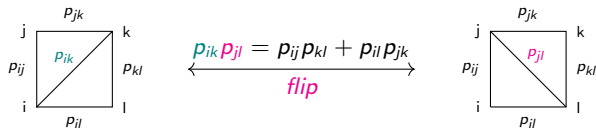
Para $\mathbb{R}^{2 \times 4}$ tenemos otro test de positividad: $\{p_{24}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34}\}$.

Los dos se pueden visualizar usando las triangulaciones del cuadrado:



Relaciones entre los menores y Ptolomeo

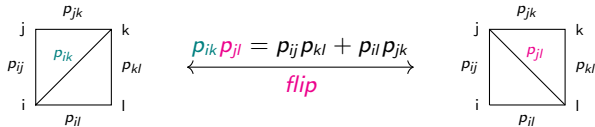
Más general para una matriz $M \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ uno puede verificar que para todos $i < j < k < l \in \{1, \dots, n\}$ tenemos $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$:



¿Les parece conocida?

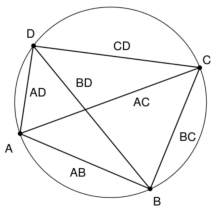
Relaciones entre los menores y Ptolomeo

Más general para una matriz $M \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ uno puede verificar que para todos $i < j < k < l \in \{1, \dots, n\}$ tenemos $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$:



¿Les parece conocida?

La relación de Ptolomeo: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$



Test de positividad y el álgebra de conglomerado \mathcal{A}_T

Consecuencia: $\left\{ \begin{array}{c} \text{test de positividad} \\ \text{eficiente} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{c} \text{triangulación} \\ \text{del } n\text{-ángon} \end{array} \right\}.$

\Rightarrow *una* triangulación contiene la información de *todos* test de positividad usando los *flips*.

Test de positividad y el álgebra de conglomerado \mathcal{A}_T

Consecuencia: $\left\{ \begin{array}{c} \text{test de positividad} \\ \text{eficiente} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{c} \text{triangulación} \\ \text{del } n\text{-ángon} \end{array} \right\}.$

\Rightarrow *una* triangulación contiene la información de *todos* test de positividad usando los *flips*.

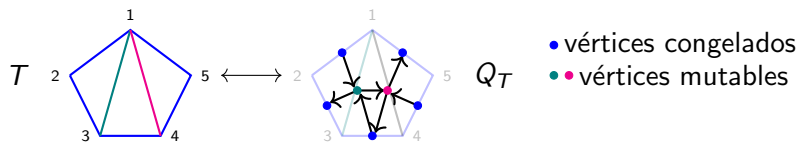
\rightsquigarrow Esta información la usamos para definir un *álgebra de conglomerado* \mathcal{A}_T asociada a una triangulación T , por ejemplo

$$T = \begin{array}{ccc} 1 & p_{12} & 2 \\ & \diagdown p_{13} & \\ p_{14} & & p_{23} \\ & \diagup p_{34} & \\ 4 & & 3 \end{array}$$

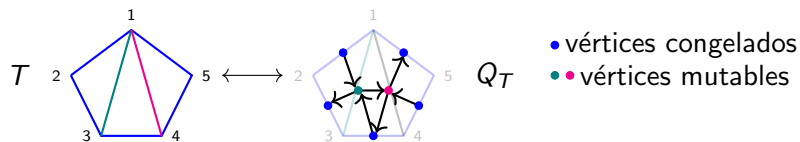
\mathcal{A}_T es el subálgebra del campo $\mathbb{Q}(p_{13}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34})$ generado de todas los menores obtenidos de T con flips

$$\mathcal{A}_T = \left\langle p_{13}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34}, \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} = p_{24} \right\rangle$$

Carcaj y mutación de carcaj



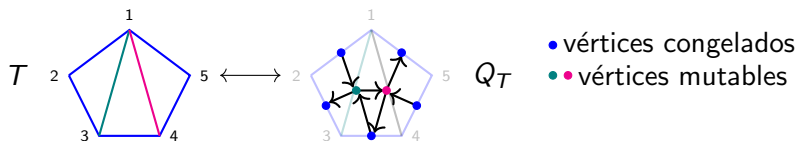
Carcaj y mutación de carcaj



Definición (Mutación de carcaj)

Q carcaj sin 1 y 2-ciclos. La mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k mutable es:
 $\forall i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega $i \rightarrow j$, invierte cada flecha en k , y elimina 2-ciclos.

Carcaj y mutación de carcaj



Definición (Mutación de carcaj)

Q carcaj sin 1 y 2-ciclos. La mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k mutable es:
 $\forall i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega $i \rightarrow j$, invierte cada flecha en k , y elimina 2-ciclos.

$$p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk} \quad \longleftrightarrow \quad x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j.$$


Definición (Mutación de semillas)

Dado una semilla $s = (\mathbf{x}, Q)$ y un vertex mutable k de Q , la *mutación en la dirección k* $\mu_k(s)$ es el par $(\mu_k(\mathbf{x}), \mu_k(Q))$, donde $\mu_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}$.

Ejemplo: mutación de semillas

$$x_1 \rightarrow x_2$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$x_1 \rightarrow x_2$$


Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \end{array}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \end{array}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} =: x_4 \end{array}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} =: x_4 \\ \searrow 1 \end{array}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} =: x_4 \\ \searrow 1 \end{array}$$

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \right) \div \frac{1+x_2}{x_1}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} =: x_4 \\ \searrow 1 \end{array}$$

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1 x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} =: x_4 \\ \searrow 1 \end{array}$$

la magia de conglomerado!

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)} = \frac{1+x_1}{x_2}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} =: x_4 \\ \swarrow 1 \\ x_5 := \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \end{array}$$

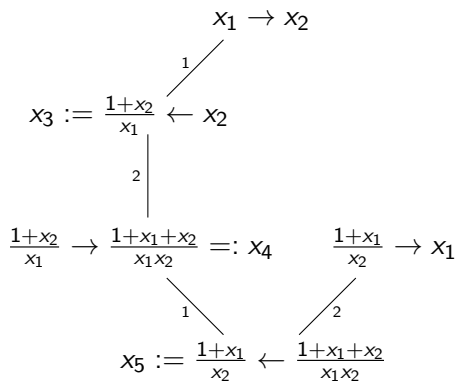
la magia de conglomerado!

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)} = \frac{1+x_1}{x_2}$$

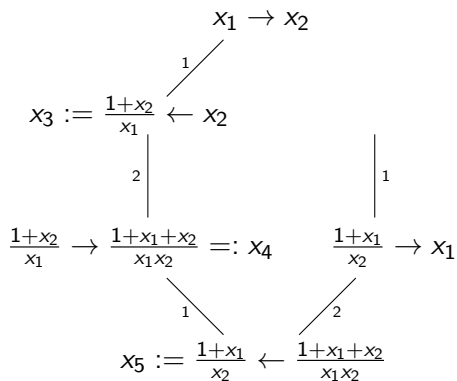
Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} =: x_4 \\ \swarrow 1 \quad \nwarrow 2 \\ x_5 := \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \end{array}$$

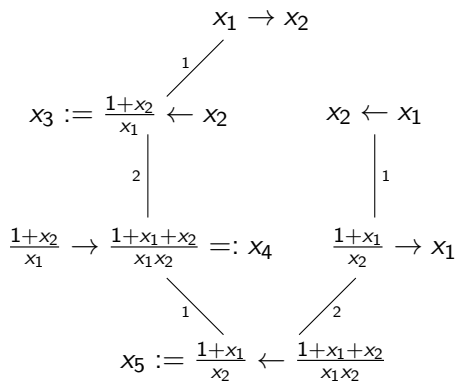
Ejemplo: mutación de semillas



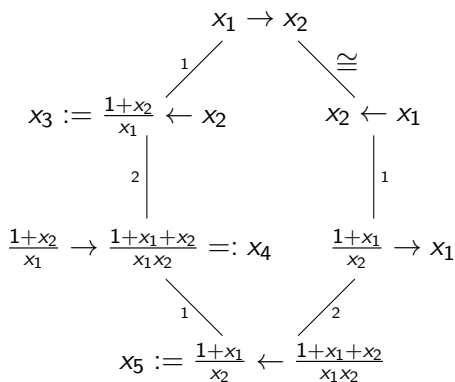
Ejemplo: mutación de semillas



Ejemplo: mutación de semillas



Ejemplo: mutación de semillas



álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_Q := \left\langle x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\rangle \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2)$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Conjetura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado están contenidos en $\mathbb{N}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Conjetura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado están contenidos en $\mathbb{N}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Teorema de Positividad (Gross–Hacking–Keel–Kontsevich 2014)

La conjetura de positividad es verdadera.

Gross–Hacking–Keel–Kontsevich ven las álgebras de conglomerado como anillos de funciones en variedades log Calabi–Yau (*variedades de conglomerado*) y usan herramientas de la geometría biracional y la simetría especular (mirror symmetry).

Clasificación de tipo finito (Fomin–Zelevinsky 2003)

El álgebra de conglomerado \mathcal{A}_Q es de *tipo finito* (el conjunto de semillas es finito) si y solo si (la parte mutable de) Q es equivalente bajo mutación a una orientación de un diagrama de Dynkin de tipo ADE:

$$A_n : \quad \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \dots \text{ --- } \bullet$$

$$D_n : \quad \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \dots \text{ --- } \bullet \begin{array}{l} \diagup \bullet \\ \diagdown \bullet \end{array}$$

$$E_6 : \quad \begin{array}{cccccc} & & \bullet & & & \\ & & | & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

$$E_7 : \quad \begin{array}{ccccccc} & & \bullet & & & & \\ & & | & & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

$$E_8 : \quad \begin{array}{cccccccc} & & \bullet & & & & & \\ & & | & & & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

Complejo de conglomerado

Dada un álgebra de conglomerado (de tipo finito) \mathcal{A}_Q definimos su *complejo de conglomerado* Δ_Q :

vértices de $\Delta_Q \leftrightarrow$ variables de conglomerado $x_k \in \mathcal{A}_Q$

simplices maximales de $\Delta_Q \leftrightarrow$ semillas (Q, \mathbf{x}) de \mathcal{A}_Q

Complejo de conglomerado

Dada un álgebra de conglomerado (de tipo finito) \mathcal{A}_Q definimos su *complejo de conglomerado* Δ_Q :

vértices de $\Delta_Q \leftrightarrow$ variables de conglomerado $x_k \in \mathcal{A}_Q$

simplices maximales de $\Delta_Q \leftrightarrow$ semillas (Q, \mathbf{x}) de \mathcal{A}_Q

Su *ideal de Stanley–Reisner* \mathcal{I}_Q es el ideal monomial generado de

$$\{x_k x_\ell : \nexists \text{ semilla } (Q, \mathbf{x}) \text{ tal que } x_k, x_\ell \in \mathbf{x}\}$$

Complejo de conglomerado

Dada un álgebra de conglomerado (de tipo finito) \mathcal{A}_Q definimos su *complejo de conglomerado* Δ_Q :

vértices de $\Delta_Q \leftrightarrow$ variables de conglomerado $x_k \in \mathcal{A}_Q$

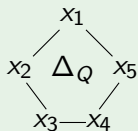
simplices maximales de $\Delta_Q \leftrightarrow$ semillas (Q, \mathbf{x}) de \mathcal{A}_Q

Su *ideal de Stanley–Reisner* \mathcal{I}_Q es el ideal monomial generado de

$$\{x_k x_\ell : \nexists \text{ semilla } (Q, \mathbf{x}) \text{ tal que } x_k, x_\ell \in \mathbf{x}\}$$

Example

Para $\mathcal{A}_{x_1 \rightarrow x_2}$ el complejo de conglomerado es un pentágono:



$$\mathcal{I}_Q = (x_1 x_3, x_2 x_5, x_3 x_5, x_1 x_4, x_2 x_5) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_5]$$

Ideales iniciales y el abanico de Gröbner

Para $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal (homogéneo) y $w \in \mathbb{R}^n$ definimos el *ideal inicial* $\text{in}_w(I) = (\text{in}_w(f) : f \in I)$ donde $\text{in}_w(f)$ es la suma de términos en f con w -peso maximal (e.g. $\text{in}_{(1,2)}(x_1^2 + x_1x_2) = x_1x_2$).

Ideales iniciales y el abanico de Gröbner

Para $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal (homogéneo) y $w \in \mathbb{R}^n$ definimos el *ideal inicial* $\text{in}_w(I) = (\text{in}_w(f) : f \in I)$ donde $\text{in}_w(f)$ es la suma de términos en f con w -peso maximal (e.g. $\text{in}_{(1,2)}(x_1^2 + x_1x_2) = x_1x_2$).

Definición (Mora–Robbiona 1988)

El *abanico de Gröbner* $\text{GF}(I)$ de un ideal homogéneo $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ es \mathbb{R}^n con estructura de abanico:

$$u, v \in C^\circ \Leftrightarrow \text{in}_u(I) = \text{in}_v(I) =: \text{in}_C(I).$$

Ideales iniciales y el abanico de Gröbner

Para $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal (homogéneo) y $w \in \mathbb{R}^n$ definimos el *ideal inicial* $\text{in}_w(I) = (\text{in}_w(f) : f \in I)$ donde $\text{in}_w(f)$ es la suma de términos en f con w -peso maximal (e.g. $\text{in}_{(1,2)}(x_1^2 + x_1x_2) = x_1x_2$).

Definición (Mora–Robbiona 1988)

El *abanico de Gröbner* $\text{GF}(I)$ de un ideal homogéneo $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ es \mathbb{R}^n con estructura de abanico:

$$u, v \in C^\circ \Leftrightarrow \text{in}_u(I) = \text{in}_v(I) =: \text{in}_C(I).$$

$$\{\text{conos maximales en } \text{GF}(I)\} \leftrightarrow \{\text{ideales monomiales } \text{in}_{<}(I)\}$$

donde $\text{in}_{<}(I)$ son ideales iniciales con respecto a un orden monomial
 \rightsquigarrow como en la charla de Yuriko

Positividad total de ideales

$J \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ es *totalmente positivo* si $J \cap \mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_n] = \emptyset$.

Nota: si J contiene un monomio *no* es totalmente positivo.

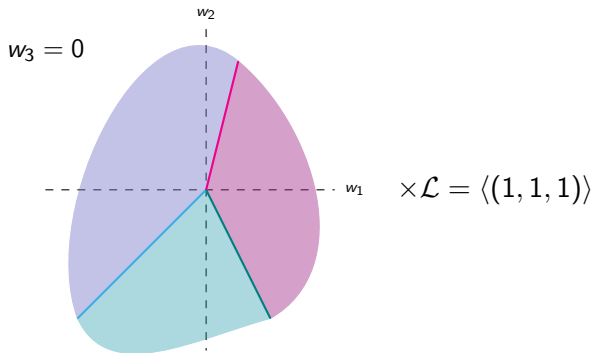
Definimos los siguientes dos subabánico cerrado de $\text{GF}(J)$

$$\text{Trop}(J) := \{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(J) \text{ no contiene monomios}\}$$

$$\text{Trop}^+(J) := \{w \in \mathbb{R}^n : \text{in}_w(J) \text{ totalmente positivo}\}$$

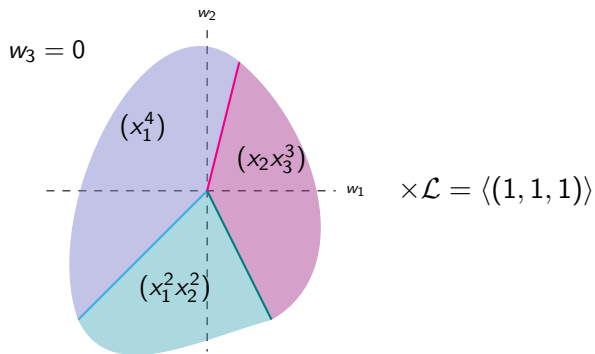
Ejemplo

Sea $J = (x_1^2 x_2^2 + x_1^4 - x_2 x_3^3) \subset k[x_1, x_2, x_3]$, pues $\text{GF}(J) = \mathbb{R}^3$ con estructura de abanico:



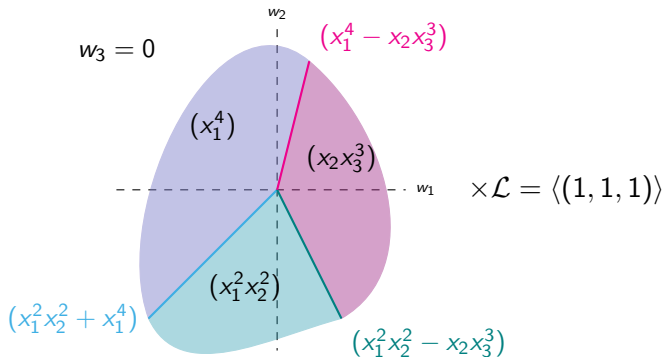
Ejemplo

Sea $J = (x_1^2 x_2^2 + x_1^4 - x_2 x_3^3) \subset k[x_1, x_2, x_3]$, pues $\text{GF}(J) = \mathbb{R}^3$ con estructura de abanico:



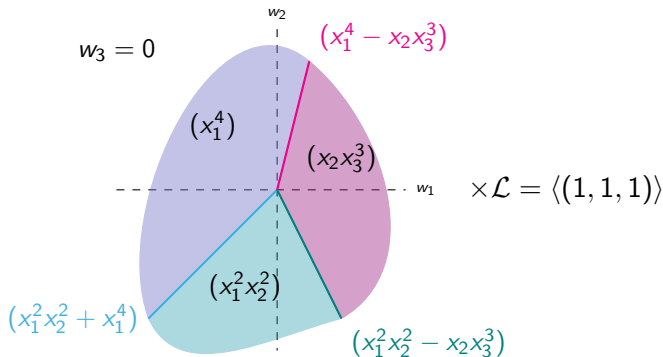
Ejemplo

Sea $J = (x_1^2 x_2^2 + x_1^4 - x_2 x_3^3) \subset k[x_1, x_2, x_3]$, pues $\text{GF}(J) = \mathbb{R}^3$ con estructura de abanico:



Ejemplo

Sea $J = (x_1^2 x_2^2 + x_1^4 - x_2 x_3^3) \subset k[x_1, x_2, x_3]$, pues $\text{GF}(J) = \mathbb{R}^3$ con estructura de abanico:



$\text{Trop}(J)$ es el 1-esqueleto y $\text{Trop}^+(J)$ es generado de r_1 y r_2

La teoría de Gröbner del álgebra de conglomerado \mathcal{A}_T

Sea \mathcal{A}_T el álgebra de conglomerado de una triangulación del n -ágono y sea $J \subset k[p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n]$ generado de $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$. Entonces,

$$\mathcal{A}_T \cong \mathbb{Z}[p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n]/J$$

La teoría de Gröbner del álgebra de conglomerado \mathcal{A}_T

Sea \mathcal{A}_T el álgebra de conglomerado de una triangulación del n -ágono y sea $J \subset k[p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n]$ generado de $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$. Entonces,

$$\mathcal{A}_T \cong \mathbb{Z}[p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n]/J$$

Teorema (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

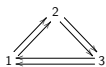
$\exists!$ $C \in \text{GF}(J)$ cono maximal suave tal que

- 1 el **ideal de Stanley–Reisner** $\mathcal{I}_T = \text{in}_C(J)$
- 2 $C \cap \text{Trop}(J) = \text{Trop}^+(J)$ es una realización geométrica del **abanico de conglomerado**
- 3 todos los ideales iniciales con respecto a caras maximales en $\text{Trop}^+(J)$ son ideales **binomiales y primos**

Más ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$

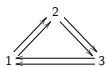


- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

Más ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$



y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

2 Ondas solitarias

- ▶ son ondas en agua de poca profundidad que viajan preservando su forma y su energía
- ▶ soluciones de la ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP):
$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$



©M.J.Ablowitz, Nuevo Vallarta, Nayarit, México, <https://sites.google.com/site/ablowitz>

- ▶ definen semillas en un álgebra de conglomerado

3 ...

Referencias

- BMN Lara Bossinger, Fatemeh Mohammadi, Alfredo Nájera Chávez. Families of Gröbner Degenerations, Grassmannians and Universal Cluster Algebras *SIGMA* 17 (2021)
- FZ02 Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.
- FZ03 Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.* 154 (2003), no. 1, 63–121.
- FG07 Vladimir V. Fock and Alexander Goncharov. Dual Teichmüller and lamination spaces. Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 647–684, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 11, Eur. Math. Soc., Zürich, (2007)
- GHKK Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608 (2018)
- MR88 Teo Mora and Lorenzo Robbiano. The Gröbner fan of an ideal. *Computational aspects of commutative algebra. J. Symbolic Comput.* 6 (1988), no. 2-3, 183–208
- Pen87 Robert C. Penner. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces. *Comm. Math. Phys.* Volume 113, Number 2 (1987), 299-339.
- LS19 Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Cluster algebras and Jones polynomials. *Selecta Math. (N.S.)* 25 4 Paper No. 58, 41 (2019)

Plaza Álgebra (convocatoria abierta hasta el 27 de diciembre de 2021)

por [Eréndira Esther Carreño](#) — Última modificación 16/11/2021 16:17

A partir del 14 de noviembre de 2021 se encuentra abierta una convocatoria para ocupar una plaza de Investigador Asociado "C" o Titular "A" en el área de Álgebra (representaciones de álgebra, álgebra en general, combinatoria algebraica, teoría de homología, teoría de números, teoría de categorías, etc.)

Sede de trabajo: Ciudad Universitaria, Ciudad de México.

Convocatoria: <https://www.mathjobs.org/jobs/list/19004>

Fecha límite para recibir postulaciones: 1° de febrero del 2022.

Fecha inicio de actividades laborales: 1° de agosto del 2022 (fecha flexible).