Topología y geometría de espacios de Alexandrov en dimensión 3

Coloquio Oaxaqueño Virtual
Instituto de Matemáticas · UNAM · Unidad Oaxaca

Fernando Galaz García

Durham University · Reino Unido

Agosto 26, 2021

La ruta

Introducción

Geometría de Alexandrov

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Concluding Remarks

Una pregunta general

¿Qué efecto tiene la curvatura en la forma de un espacio?

Una pregunta general

¿Qué efecto tiene la curvatura en la forma de un espacio?

Geometría $\rightsquigarrow$ Topología

Nuestro arquetipo

Nuestro arquetipo

Teorema (Gauss–Bonnet, ca. 1848)

Si M^2 es una variedad riemanniana 2-dimensional compacta, sin frontera y con curvatura gaussiana K, entonces

$$\int_{M^2} K dA = 2\pi\chi(M^2).$$

Nuestro arquetipo

Teorema (Gauss–Bonnet, ca. 1848)

Si M^2 es una variedad riemanniana 2-dimensional compacta, sin frontera y con curvatura gaussiana K, entonces

$$\int_{M^2} K dA = 2\pi\chi(M^2).$$

Corolario

Una variedad riemanniana 2-dimensional compacta, sin frontera y con $K > 0$ es difeomorfa a $\mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.

Nuestro objetivo

Obtener resultados similares para espacios métricos.

Nuestro objetivo

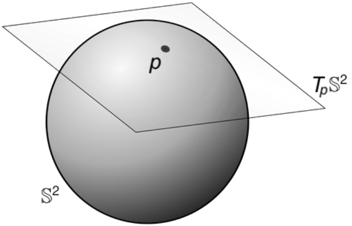
Obtener resultados similares para espacios métricos.

Hipótesis geométricas $\rightsquigarrow$ Conclusiones topológicas

Nuestro punto de partida: geometría riemanniana

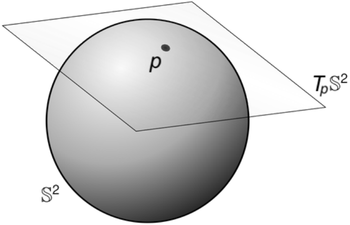
Nuestro punto de partida: geometría riemanniana

(M, g), una variedad riemanniana.



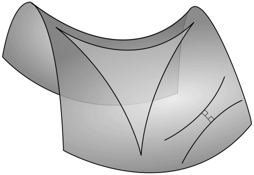
Nuestro punto de partida: geometría riemanniana

(M, g), una variedad riemanniana.



La métrica riemanniana tiene **curvatura**:

$$\Pi \subset T_pM \mapsto K(\Pi) \in \mathbb{R}.$$



Geometría métrica

Definición

Un **espacio de longitud** es un espacio métrico (X, dist) arco-conexo tal que

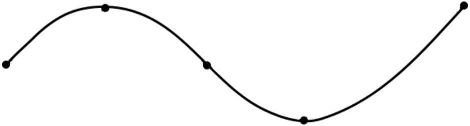
$$\mathrm{dist}(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}} \mathrm{Longitud}(\gamma).$$

Geometría métrica

Definición

Un **espacio de longitud** es un espacio métrico (X, dist) arco-conexo tal que

$$\mathrm{dist}(p,q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}} \mathrm{Longitud}(\gamma).$$



Geometría métrica

Definición

Un **espacio de longitud** es un espacio métrico (X, dist) arco-conexo tal que

$$\mathrm{dist}(p,q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}} \mathrm{Longitud}(\gamma).$$

Geometría métrica

Definición

Un **espacio de longitud** es un espacio métrico (X, dist) arco-conexo tal que

$$\mathrm{dist}(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}} \mathrm{Longitud}(\gamma).$$

Geometría métrica

Geometría métrica

Definición

Geometría métrica

Definición

- Una curva $\gamma\colon [0,1] \to (X, \mathrm{dist})$ es una **geodésica** si

$$\mathrm{Longitud}(\gamma) = \mathrm{dist}(\gamma(0), \gamma(1)).$$

Geometría métrica

Definición

- Una curva $\gamma\colon [0,1] \to (X, \mathrm{dist})$ es una **geodésica** si

$$\mathrm{Longitud}(\gamma) = \mathrm{dist}(\gamma(0), \gamma(1)).$$

- Un espacio de longitud (X, dist) es un **espacio geodésico** si dos puntos cualesquiera $p, q \in X$ pueden ser unidos por una geodésica.

Geometría métrica

Definición

- Una curva $\gamma\colon [0,1] \to (X, \mathrm{dist})$ es una **geodésica** si

$$\mathrm{Longitud}(\gamma) = \mathrm{dist}(\gamma(0), \gamma(1)).$$

- Un espacio de longitud (X, dist) es un **espacio geodésico** si dos puntos cualesquiera $p, q \in X$ pueden ser unidos por una geodésica.

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es un espacio de longitud pero no es un espacio geodésico.

Geometría métrica

Definición

- Una curva $\gamma\colon [0,1] \to (X, \mathrm{dist})$ es una **geodésica** si

$$\mathrm{Longitud}(\gamma) = \mathrm{dist}(\gamma(0), \gamma(1)).$$

- Un espacio de longitud (X, dist) es un **espacio geodésico** si dos puntos cualesquiera $p, q \in X$ pueden ser unidos por una geodésica.

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es un espacio de longitud pero no es un espacio geodésico.
- Las variedades riemannianas completas son espacios geodésicos.

Geometría métrica

Geometría métrica

Definición

El **espacio modelo** S_k^2 con curvatura $k \in \mathbb{R}$ es la variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante k:

Geometría métrica

Definición

El **espacio modelo** S_k^2 con curvatura $k \in \mathbb{R}$ es la variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante k:

- Una 2-esfera redonda, si $k > 0$.

Geometría métrica

Definición

El **espacio modelo** S_k^2 con curvatura $k \in \mathbb{R}$ es la variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante k:

- Una 2-esfera redonda, si $k > 0$.
- El plano euclidiano, si $k = 0$.

Geometría métrica

Definición

El **espacio modelo** S_k^2 con curvatura $k \in \mathbb{R}$ es la variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante k:

- Una 2-esfera redonda, si $k > 0$.
- El plano euclidiano, si $k = 0$.
- Un plano hiperbólico, si $k < 0$.

Geometría métrica

Definición

El **espacio modelo** S_k^2 con curvatura $k \in \mathbb{R}$ es la variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante k:

- Una 2-esfera redonda, si $k > 0$.

- El plano euclidiano, si $k = 0$.

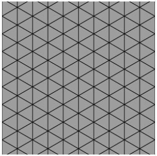
- Un plano hiperbólico, si $k < 0$.

Geometría métrica

Definición

El **espacio modelo** S_k^2 con curvatura $k \in \mathbb{R}$ es la variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante k:

- Una 2-esfera redonda, si $k > 0$.
- El plano euclidiano, si $k = 0$.
- Un plano hiperbólico, si $k < 0$.

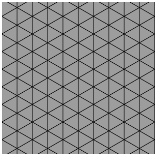
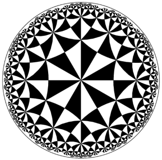


Geometría métrica

Definición

El **espacio modelo** S_k^2 con curvatura $k \in \mathbb{R}$ es la variedad riemanniana completa y simplemente conexa con curvatura constante k:

- Una 2-esfera redonda, si $k > 0$.
- El plano euclidiano, si $k = 0$.
- Un plano hiperbólico, si $k < 0$.

Geometría métrica

Definición

Geometría métrica

Definición

- Un **triángulo** $\triangle pqr$ en un espacio geodésico X consiste de:

  tres puntos (distintos) $p, q, r \in X$ y

  tres geodésicas $[pq]$, $[pr]$, $[qr]$ que los unen.

Definición

- Un **triángulo** $\triangle pqr$ en un espacio geodésico X consiste de:

  tres puntos (distintos) $p, q, r \in X$ y

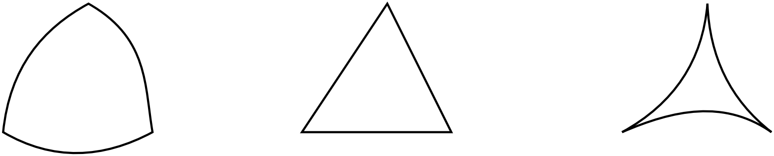
  tres geodésicas $[pq]$, $[pr]$, $[qr]$ que los unen.

- Un **triángulo de comparación** en S_k^2 es un triángulo $\triangle \overline{pqr}$ en S_k^2 cuyos lados tienen la misma longitud que los lados de $\triangle pqr$.

Geometría métrica

Ejemplo

Triángulos de comparación



$k>0$ $k=0$ $k<0$

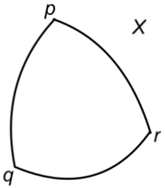
Curvatura en espacios geodésicos

Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)

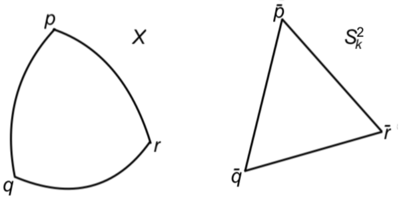
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



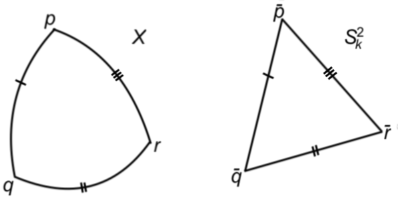
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



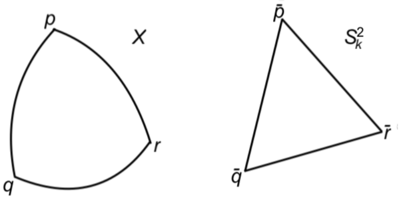
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



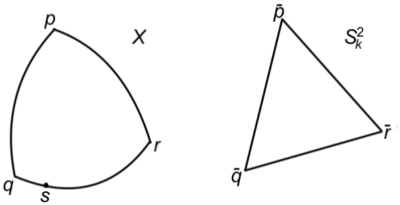
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



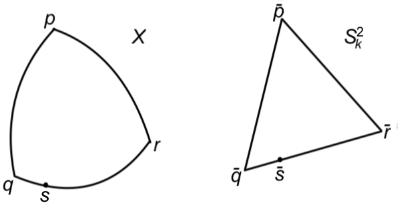
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



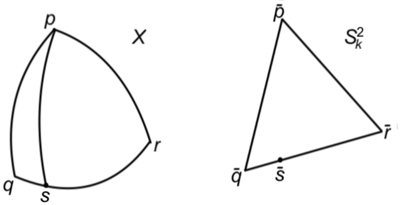
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



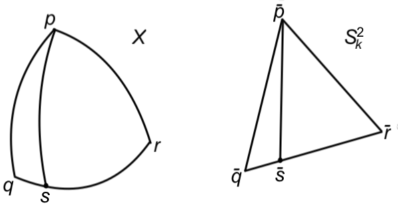
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



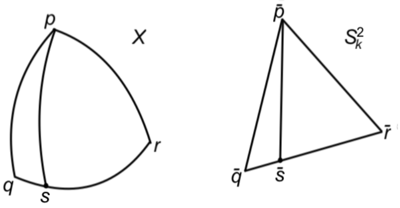
Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



Curvatura en espacios geodésicos

Definición (Propiedad T_k para tres puntos $p, q, r \in X$)



Dados $\triangle pqr \subset X$ y $\triangle \overline{pqr} \subset S_k^2$, la propiedad T_k se cumple si, para cualquier punto s en la geodésica de q a r, se cumple que

$$\mathrm{dist}(p, s) \geq \mathrm{dist}(\overline{p}, \overline{s}),$$

donde $\overline{s}$ es el punto en la geodésica de $\overline{q}$ a $\overline{r}$ que corresponde a s.

Espacios de Alexandrov

Espacios de Alexandrov

Definición

Un **espacio de Alexandrov con curvatura acotada inferiormente por** $k \in \mathbb{R}$ es un espacio geodésico completo con dimensión (de Hausdorff) finita que satisface la propiedad T_k localmente.

Espacios de Alexandrov

Definición

Un **espacio de Alexandrov con curvatura acotada inferiormente por** $k \in \mathbb{R}$ es un espacio geodésico completo con dimensión (de Hausdorff) finita que satisface la propiedad T_k localmente.

Ejemplos

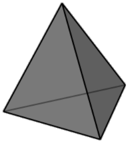
Espacios de Alexandrov

Definición

Un **espacio de Alexandrov con curvatura acotada inferiormente por** $k \in \mathbb{R}$ es un espacio geodésico completo con dimensión (de Hausdorff) finita que satisface la propiedad T_k localmente.

Ejemplos

Este es un espacio de Alexandrov:



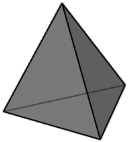
Espacios de Alexandrov

Definición

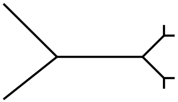
Un **espacio de Alexandrov con curvatura acotada inferiormente por** $k \in \mathbb{R}$ es un espacio geodésico completo con dimensión (de Hausdorff) finita que satisface la propiedad T_k localmente.

Ejemplos

Este es un espacio de Alexandrov:



Este **no** es un espacio de Alexandrov:



Espacios de Alexandrov

Espacios de Alexandrov

Propiedades importantes

Espacios de Alexandrov

Propiedades importantes

- Las geodésicas no se bifurcan:  X

Espacios de Alexandrov

Propiedades importantes

- Las geodésicas no se bifurcan:  X
- Teorema de globalización de Toponogov:

Espacios de Alexandrov

Propiedades importantes

- Las geodésicas no se bifurcan:  X
- Teorema de globalización de Toponogov: *la propiedad T_k se cumple globalmente.*

Espacios de Alexandrov

Propiedades importantes

- Las geodésicas no se bifurcan:  X
- Teorema de globalización de Toponogov: *la propiedad T_k se cumple globalmente.*
- La dimensión de Hausdorff de X es un entero.

Espacios de Alexandrov

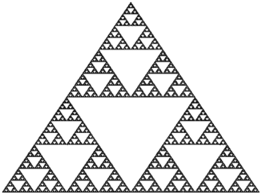
Propiedades importantes

- Las geodésicas no se bifurcan: 

- Teorema de globalización de Toponogov: *la propiedad T_k se cumple globalmente.*
- La dimensión de Hausdorff de X es un entero.

Ejemplo

Este **no** es un espacio de Alexandrov:



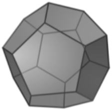
Ejemplos y construcciones

Ejemplos y construcciones

- Variedades riemannianas completas con $\sec \geq k$.

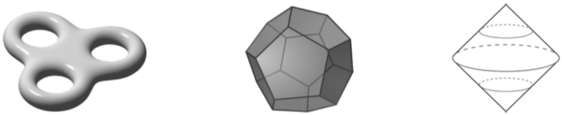
Ejemplos y construcciones

- Variedades riemannianas completas con $\sec \geq k$.
- $X = \partial Y$, donde $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.



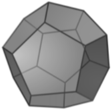
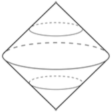
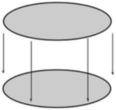
Ejemplos y construcciones

- Variedades riemannianas completas con $\sec \geq k$.
- $X = \partial Y$, donde $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.
- Conos y suspensiones de espacios de Alexandrov con $\text{curv} \geq 1$.



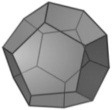
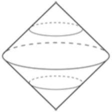
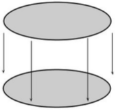
Ejemplos y construcciones

- Variedades riemannianas completas con $\sec \geq k$.
- $X = \partial Y$, donde $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.
- Conos y suspensiones de espacios de Alexandrov con $\operatorname{curv} \geq 1$.
- $X = Y_1 \cup_\partial Y_2$, donde los Y_i son espacios de Alexandrov con fronteras isométricas.

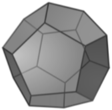
Ejemplos y construcciones

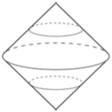
- Variedades riemannianas completas con $\sec \geq k$.
- $X = \partial Y$, donde $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.
- Conos y suspensiones de espacios de Alexandrov con curv ≥ 1.
- $X = Y_1 \cup_\partial Y_2$, donde los Y_i son espacios de Alexandrov con fronteras isométricas.
- $X = Y/G$, donde G es un grupo compacto de isometrías y curv $Y \geq k$.

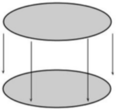





Ejemplos y construcciones

- Variedades riemannianas completas con sec $\geq k$.
- $X = \partial Y$, donde $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.
- Conos y suspensiones de espacios de Alexandrov con curv ≥ 1.
- $X = Y_1 \cup_\partial Y_2$, donde los Y_i son espacios de Alexandrov con fronteras isométricas.
- $X = Y/G$, donde G es un grupo compacto de isometrías y curv $Y \geq k$.
- Ciertos espacios compactos estratificados cuyos estratos regulares admiten sec $\geq k$.

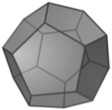
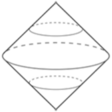
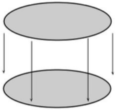






Ejemplos y construcciones

- Variedades riemannianas completas con $\sec \geq k$.
- $X = \partial Y$, donde $Y \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.
- Conos y suspensiones de espacios de Alexandrov con $\mathrm{curv} \geq 1$.
- $X = Y_1 \cup_\partial Y_2$, donde los Y_i son espacios de Alexandrov con fronteras isométricas.
- $X = Y/G$, donde G es un grupo compacto de isometrías y $\mathrm{curv}\, Y \geq k$.
- Ciertos espacios compactos estratificados cuyos estratos regulares admiten $\sec \geq k$.
- $X = \lim_{GH} M_i^n$, donde los M_i^n son n-variedades riemannianas compactas con $\sec M_i \geq k$.

Estructura local

Estructura local

Ángulos y espacio de direcciones

- Ángulso entre geodésicas $\longrightarrow$ direcciones tangentes.
- $\Sigma_p =$ **espacio de direcciones de** X **en** p.

Estructura local

Ángulos y espacio de direcciones

- Ángulso entre geodésicas $\longrightarrow$ direcciones tangentes.
- $\Sigma_p =$ **espacio de direcciones de** X **en** p.

Teorema (Burago, Gromov, Perelman, 1992)

- $(\Sigma_p, \angle)$ *es un espacio de Alexandrov con* $\operatorname{curv} \geq 1$.
- $\dim \Sigma_p = \dim X - 1$.

Estructura local

Ángulos y espacio de direcciones

- Ángulso entre geodésicas $\longrightarrow$ direcciones tangentes.
- Σ_p = **espacio de direcciones de** X **en** p.

Teorema (Burago, Gromov, Perelman, 1992)

- $(\Sigma_p, \angle)$ *es un espacio de Alexandrov con* $\mathrm{curv} \geq 1$.
- $\dim \Sigma_p = \dim X - 1$.

Teorema (Perelman, 1992)

Cada $p \in X$ *tiene una vecindad homeomorfa al cono sobre* Σ_p.

Hábitat

Teorema (Burago, Gromov, Perelman, 1992)

La cerradura $\overline{\mathcal{M}^n_{k,D}}$ del conjunto de variedades riemannianas compactas

$$\mathcal{M}^n_{k,D} = \{\, (M^n, g) \,:\, \mathrm{sec} \geq k, \mathrm{diam} \leq D \,\}$$

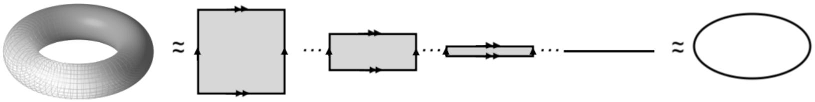
(en la topología de Gromov–Hausdorff) consiste de espacios de Alexandrov con curv $\geq k$, diam $\leq D$ *y* dim $\leq n$.

Estabilidad

Teorema (Perelman, 1992)

Si dos espacios de Alexandrov compactos, n-dimensionales, con curv $\geq k$ *están suficientemente GH-cerca, entonces son homeomorfos.*

Colapso



$$T^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

¿Ahora, hacia dónde?

¿Ahora, hacia dónde?

- Geometría

¿Ahora, hacia dónde?

- Geometría
- Análisis

¿Ahora, hacia dónde?

- Geometría
- Análisis
- Simetrías

¿Ahora, hacia dónde?

- Geometría
- Análisis
- Simetrías
- Topología

¿Ahora, hacia dónde?

- Geometría
- Análisis
- Simetrías
- **Topología**

Espacios de Alexandrov de dimensión 1

Espacios de Alexandrov de dimensión 1

Dimensión 1

Espacios de Alexandrov de dimensión 1

Dimensión 1

- Si $\dim X = 1$, entonces X es una variedad (posiblemente con frontera).

Espacios de Alexandrov de dimensión 1

Dimensión 1

- Si $\dim X = 1$, entonces X es una variedad (posiblemente con frontera).
- Si X es compacto, entonces $X \approx [0,1]$ o $\mathbb{S}^1$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 1

Dimensión 1

- Si $\dim X = 1$, entonces X es una variedad (posiblemente con frontera).
- Si X es compacto, entonces $X \approx [0,1]$ o $\mathbb{S}^1$.

Definición

Si $\dim X > 1$, entonces

$$\partial X = \{p \in X : \partial \Sigma_p \neq \varnothing\}.$$

Espacios de Alexandrov de dimensión 1

Dimensión 1

- Si $\dim X = 1$, entonces X es una variedad (posiblemente con frontera).
- Si X es compacto, entonces $X \approx [0, 1]$ o $\mathbb{S}^1$.

Definición

Si $\dim X > 1$, entonces

$$\partial X = \{p \in X : \partial \Sigma_p \neq \varnothing\}.$$

Espacios de Alexandrov de dimensión 2

Espacios de Alexandrov de dimensión 2

Dimensión 2

Espacios de Alexandrov de dimensión 2

Dimensión 2

- Si $\dim X = 2$, entonces X es una variedad topológica (posiblemente con frontera).

Espacios de Alexandrov de dimensión 2

Dimensión 2

- Si $\dim X = 2$, entonces X es una variedad topológica (posiblemente con frontera).
- Si $\dim X = 2$, $\partial X = \varnothing$ y $\operatorname{curv} X \geq 1$, entonces $X \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 2

Dimensión 2

- Si $\dim X = 2$, entonces X es una variedad topológica (posiblemente con frontera).

- Si $\dim X = 2$, $\partial X = \varnothing$ y $\operatorname{curv} X \geq 1$, entonces $X \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.

Espacios de direcciones en dimensión 3

3-espacios de Alexandrov sin frontera $\implies$ $\Sigma_p \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

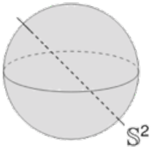
Ejemplo

- $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

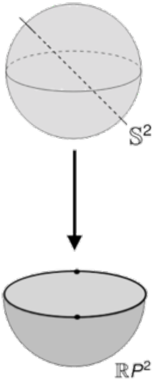
- $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.



Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

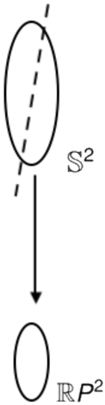
- $A \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.
- $\mathbb{S}^2 / A \approx \mathbb{R}P^2$.



Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

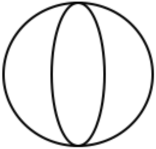
- $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.
- $\mathbb{S}^2/A \approx \mathbb{R}P^2$.



Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

- $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.
- $\mathbb{S}^2/A \approx \mathbb{R}P^2$.
- $\mathbb{S}^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{S}^2)$

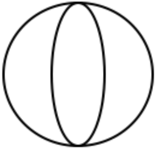


$\mathbb{S}^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{S}^2)$

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

- $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.
- $\mathbb{S}^2/A \approx \mathbb{R}P^2$.
- $\mathbb{S}^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{S}^2)$
- $\iota = \mathrm{Susp}(A)\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$.

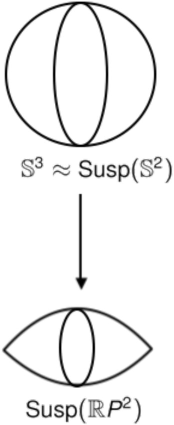


$\mathbb{S}^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{S}^2)$

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

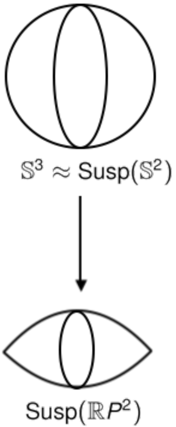
- $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.
- $\mathbb{S}^2/A \approx \mathbb{R}P^2$.
- $\mathbb{S}^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{S}^2)$
- $\iota = \mathrm{Susp}(A)\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$.
- $\mathbb{S}^3/\iota \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$.



Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

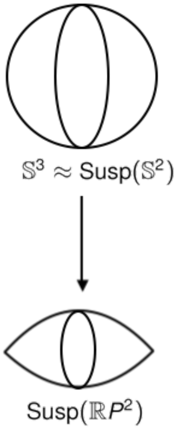
- $A \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.
- $\mathbb{S}^2/A \approx \mathbb{R}P^2$.
- $\mathbb{S}^3 \approx \mathsf{Susp}(\mathbb{S}^2)$
- $\iota = \mathsf{Susp}(A) \colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$.
- $\mathbb{S}^3/\iota \approx \mathsf{Susp}(\mathbb{R}P^2)$.
- Dos puntos con vecindades homeomorfas a conos sobre over $\mathbb{R}P^2$.



Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Ejemplo

- $A\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ función antipodal.
- $\mathbb{S}^2/A \approx \mathbb{R}P^2$.
- $\mathbb{S}^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{S}^2)$
- $\iota = \mathrm{Susp}(A)\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$.
- $\mathbb{S}^3/\iota \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$.
- Dos puntos con vecindades homeomorfas a conos sobre $\mathbb{R}P^2$.
- $X_o \approx \mathbb{R}P^2 \times [0,1]$.



Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Sea (X, d) un 3-espacio de Alexandrov cerrado. (–, Guijarro, 2015)

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Sea (X, d) un 3-espacio de Alexandrov cerrado. (–, Guijarro, 2015)

- $\Sigma_p \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Sea (X, d) un 3-espacio de Alexandrov cerrado. (–, Guijarro, 2015)

- $\Sigma_p \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.
- Cada $p \in X$ tiene una vecindad homeomorfa al cono sobre Σ_p.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Sea (X, d) un 3-espacio de Alexandrov cerrado. (–, Guijarro, 2015)

- $\Sigma_p \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.
- Cada $p \in X$ tiene una vecindad homeomorfa al cono sobre Σ_p.
- X es homeomorfo a una 3-variedad compacta X_o con un número finito de componentes de frontera $\mathbb{R}P^2$ a cada una de las cuales se le pega un cono sobre $\mathbb{R}P^2$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Sea (X, d) un 3-espacio de Alexandrov cerrado. (–, Guijarro, 2015)

- $\Sigma_p \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.
- Cada $p \in X$ tiene una vecindad homeomorfa al cono sobre Σ_p.
- X es homeomorfo a una 3-variedad compacta X_o con un número finito de componentes de frontera $\mathbb{R}P^2$ a cada una de las cuales se le pega un cono sobre $\mathbb{R}P^2$.
- X no es variedad $\Longrightarrow X \approx \tilde{X}/\iota$, donde

  $\tilde{X}$ es una 3-variedad topológica cerrada y orientable;

  $\iota \colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ es una involución que invierte la orientación y con sólo puntos fijos aislados.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Sea (X, d) un 3-espacio de Alexandrov cerrado. (–, Guijarro, 2015)

- $\Sigma_p \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.
- Cada $p \in X$ tiene una vecindad homeomorfa al cono sobre Σ_p.
- X es homeomorfo a una 3-variedad compacta X_o con un número finito de componentes de frontera $\mathbb{R}P^2$ a cada una de las cuales se le pega un cono sobre $\mathbb{R}P^2$.
- X no es variedad $\Longrightarrow X \approx \tilde{X}/\iota$, donde

  $\tilde{X}$ es una 3-variedad topológica cerrada y orientable;

  $\iota\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ es una involución que invierte la orientación y con sólo puntos fijos aislados.
- $\tilde{X}$ tiene una métrica de Alexandrov $\tilde{d}$ (levantamiento de d) con la misma cota inferior de curvatura que X y ι es una isometría con respecto a $\tilde{d}$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Sea (X, d) un 3-espacio de Alexandrov cerrado. (–, Guijarro, 2015)

- $\Sigma_p \approx \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R}P^2$.
- Cada $p \in X$ tiene una vecindad homeomorfa al cono sobre Σ_p.
- X es homeomorfo a una 3-variedad compacta X_o con un número finito de componentes de frontera $\mathbb{R}P^2$ a cada una de las cuales se le pega un cono sobre $\mathbb{R}P^2$.
- X no es variedad $\Longrightarrow X \approx \tilde{X}/\iota$, donde

  $\tilde{X}$ es una 3-variedad topológica cerrada y orientable;

  $\iota\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ es una involución que invierte la orientación y con sólo puntos fijos aislados.
- $\tilde{X}$ tiene una métrica de Alexandrov $\tilde{d}$ (levantamiento de d) con la misma cota inferior de curvatura que X y ι es una isometría con respecto a $\tilde{d}$.
- ι es equivalente a una involución diferenciable en $\tilde{X}$ (como 3-variedad diferenciable).

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Teorema (– & Guijarro, 2015)

Sea X^3 un 3-espacio de Alexandrov cerrado con curvatura positiva. Si X^3 no es una variedad, entonces $X^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Teorema (– & Guijarro, 2015)

Sea X^3 un 3-espacio de Alexandrov cerrado con curvatura positiva. Si X^3 no es una variedad, entonces $X^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$.

Corolario

Un 3-espacio de Alexandrov cerrado con curvatura positiva es homeomorfo a $\mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$ o a $\mathbb{S}^3/\Gamma$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Teorema (– & Guijarro, 2015)

Sea X^3 un 3-espacio de Alexandrov cerrado con curvatura positiva. Si X^3 no es una variedad, entonces $X^3 \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$.

Corolario

Un 3-espacio de Alexandrov cerrado con curvatura positiva es homeomorfo a $\mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$ o a $\mathbb{S}^3/\Gamma$.

Espacios de direcciones en dimensión 4

X espacio de Alexandrov 4D sin frontera $\implies$ $\Sigma_p \approx \mathrm{Susp}(\mathbb{R}P^2)$ o $\mathbb{S}^3/\Gamma$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

- Sea X' el conjunto de puntos en X con espacio de direcciones $\mathbb{R}P^2$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

- Sea X' el conjunto de puntos en X con espacio de direcciones $\mathbb{R}P^2$.
- Tenemos $X = \tilde{X}/\iota$ con $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

- Sea X' el conjunto de puntos en X con espacio de direcciones $\mathbb{R}P^2$.
- Tenemos $X = \tilde{X}/\iota$ con $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$.
- Sea $\tilde{X}'$ el conjunto de puntos fijos de $\iota \colon \tilde{X} \to \tilde{X}$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

- Sea X' el conjunto de puntos en X con espacio de direcciones $\mathbb{R}P^2$.
- Tenemos $X = \tilde{X}/\iota$ con $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$.
- Sea $\tilde{X}'$ el conjunto de puntos fijos de $\iota \colon \tilde{X} \to \tilde{X}$.
- Puesto que $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$, el grupo fundamental $\pi_1(\tilde{X}) \cong \pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{X}')$ es finito.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

- Sea X' el conjunto de puntos en X con espacio de direcciones $\mathbb{R}P^2$.
- Tenemos $X = \tilde{X}/\iota$ con $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$.
- Sea $\tilde{X}'$ el conjunto de puntos fijos de $\iota\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$.
- Puesto que $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$, el grupo fundamental $\pi_1(\tilde{X}) \cong \pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{X}')$ es finito.
- Esto implica que $\pi_1(X \setminus X') = \pi_1(X_o)$ también es finito.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

- Sea X' el conjunto de puntos en X con espacio de direcciones $\mathbb{R}P^2$.
- Tenemos $X = \tilde{X}/\iota$ con $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$.
- Sea $\tilde{X}'$ el conjunto de puntos fijos de $\iota\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$.
- Puesto que $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$, el grupo fundamental $\pi_1(\tilde{X}) \cong \pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{X}')$ es finito.
- Esto implica que $\pi_1(X \setminus X') = \pi_1(X_o)$ también es finito.
- Un teorema de Epstein en topología de 3-variedades, junto con la demostración de Perelman de la conjetura de Poincaré, implica que $X_o \approx \mathbb{R}P^2 \times [0, 1]$.

Espacios de Alexandrov de dimensión 3

Demostración del teorema

- Sea X' el conjunto de puntos en X con espacio de direcciones $\mathbb{R}P^2$.
- Tenemos $X = \tilde{X}/\iota$ con $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$.
- Sea $\tilde{X}'$ el conjunto de puntos fijos de $\iota \colon \tilde{X} \to \tilde{X}$.
- Puesto que $\operatorname{curv} \tilde{X} \geq k > 0$, el grupo fundamental $\pi_1(\tilde{X}) \cong \pi_1(\tilde{X} \setminus \tilde{X}')$ es finito.
- Esto implica que $\pi_1(X \setminus X') = \pi_1(X_o)$ también es finito.
- Un teorema de Epstein en topología de 3-variedades, junto con la demostración de Perelman de la conjetura de Poincaré, implica que $X_o \approx \mathbb{R}P^2 \times [0,1]$.
- Por lo tanto, $|X'| = 2$. $\square$

Otros resultados en dimensión 3

Teorema (–, Guijarro, Núñez-Zimbrón, 2020)

Los 3-espacios de Alexandrov cerrados, irreducibles y suficientemente colapsados están modelados en una de las geometrías 3-dimensionales de Thurston, excepto la hiperbólica.

Otros resultados en dimensión 3

Teorema (–, Guijarro, Núñez-Zimbrón, 2020)

Los 3-espacios de Alexandrov cerrados, irreducibles y suficientemente colapsados están modelados en una de las geometrías 3-dimensionales de Thurston, excepto la hiperbólica.

Colapso: $vol X_i \to 0$.

Otros resultados en dimensión 3

Teorema (–, Guijarro, Núñez-Zimbrón, 2020)

Los 3-espacios de Alexandrov cerrados, irreducibles y suficientemente colapsados están modelados en una de las geometrías 3-dimensionales de Thurston, excepto la hiperbólica.

Colapso: $\mathit{vol} X_i \to 0$.

Shioya & Yamaguchi, 2000: 3-variedades **riemannianas** cerradas colapsadas.

Otros resultados en dimensión 3

Teorema (–, Guijarro, Núñez-Zimbrón, 2020)

Los 3-espacios de Alexandrov cerrados, irreducibles y suficientemente colapsados están modelados en una de las geometrías 3-dimensionales de Thurston, excepto la hiperbólica.

Colapso: $vol X_i \to 0$.

Shioya & Yamaguchi, 2000: 3-variedades **riemannianas** cerradas colapsadas.

Mitsuishi & Yamaguchi, 2015: **Estructura** de 3-espacios de Alexandrov cerrados con colapso.

Otros resultados en dimensión 3

Teorema (–, Guijarro, Núñez-Zimbrón, 2020)

Los 3-espacios de Alexandrov cerrados, irreducibles y suficientemente colapsados están modelados en una de las geometrías 3-dimensionales de Thurston, excepto la hiperbólica.

Colapso: $vol X_i \to 0$.

Shioya & Yamaguchi, 2000: 3-variedades **riemannianas** cerradas colapsadas.

Mitsuishi & Yamaguchi, 2015: **Estructura** de 3-espacios de Alexandrov cerrados con colapso.

– & Guijarro, 2015: **Geometrización** de 3-espacios de Alexandrov cerrados y **clasificación** en el caso de curv ≥ 0.

Otros resultados en dimensión 3

Teorema (–, Guijarro, Núñez-Zimbrón, 2020)

Los 3-espacios de Alexandrov cerrados, irreducibles y suficientemente colapsados están modelados en una de las geometrías 3-dimensionales de Thurston, excepto la hiperbólica.

Colapso: $vol X_i \to 0$.

Shioya & Yamaguchi, 2000: 3-variedades **riemannianas** cerradas colapsadas.

Mitsuishi & Yamaguchi, 2015: **Estructura** de 3-espacios de Alexandrov cerrados con colapso.

– & Guijarro, 2015: **Geometrización** de 3-espacios de Alexandrov cerrados y **clasificación** en el caso de curv ≥ 0.

Núñez-Zimbrón, 2018; – & Núñez-Zimbrón, 2020: **Clasificación** de 3- espacios de Alexandrov cerrados y con acciones isométricas (locales) del **círculo**.

Comentarios finales

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

    Geometría?

    Clasificación en el caso simplemente conexo?

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

  Topología de 3-variedades **singulares** (Quinn, 1981)?

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

  Topología de 3-variedades **singulares** (Quinn, 1981)?

- **Espacios de Alexandrov de dimensión infinita.**

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

  Topología de 3-variedades **singulares** (Quinn, 1981)?

- **Espacios de Alexandrov de dimensión infinita.**

  Prácticamente inexplorados.

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

  Topología de 3-variedades **singulares** (Quinn, 1981)?

- **Espacios de Alexandrov de dimensión infinita.**

  Prácticamente inexplorados.

- **Algunas referencias**

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

  Topología de 3-variedades **singulares** (Quinn, 1981)?

- **Espacios de Alexandrov de dimensión infinita.**

  Prácticamente inexplorados.

- **Algunas referencias**
  - Burago, Burago, Ivanov: A course in metric geometry, AMS.

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

  Topología de 3-variedades **singulares** (Quinn, 1981)?

- **Espacios de Alexandrov de dimensión infinita.**

  Prácticamente inexplorados.

- **Algunas referencias**
  - Burago, Burago, Ivanov: A course in metric geometry, AMS.
  - –, Guijarro: On three-dimensional Alexandrov spaces. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015.

Comentarios finales

- **3-dimensional Alexandrov spaces**

  Geometría?

  Clasificación en el caso simplemente conexo?

  Espacios abiertos?

  Topología de 3-variedades **singulares** (Quinn, 1981)?

- **Espacios de Alexandrov de dimensión infinita.**

  Prácticamente inexplorados.

- **Algunas referencias**
  - Burago, Burago, Ivanov: A course in metric geometry, AMS.
  - –, Guijarro: On three-dimensional Alexandrov spaces. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015.
  - –, Núñez-Zimbrón: Three-dimensional Alexandrov spaces: a survey, 2021, por aparecer.

¡Muchas gracias!