

Degeneraciones de Gröbner y familias tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Oaxaca



Seminario Nacional de Geometría Algebraica

Resumen

- 1 Motivación
- 2 Teoría de Gröbner
- 3 Familias tóricas

Motivación

Entender la relación entre diferentes degeneraciones tóricas de una variedad proyectiva.

Motivación

Entender la relación entre diferentes degeneraciones tóricas de una variedad proyectiva.

Eslogan: En simetría especular, conocer todas las degeneraciones tóricas de una variedad es equivalente a conocer la variedad espejo.

Motivación

Entender la relación entre diferentes degeneraciones tóricas de una variedad proyectiva.

Eslogan: En simetría especular, conocer todas las degeneraciones tóricas de una variedad es equivalente a conocer la variedad espejo.

Hoy: Estudiar simultáneamente las degeneraciones (tóricas) de Gröbner de una variedad proyectiva polarizada.

Ideales iniciales

Sea $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Ideales iniciales

Sea $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Dado $w \in \mathbb{R}^n$ definimos la *forma inicial de f con respecto a w* como

Ideales iniciales

Sea $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Dado $w \in \mathbb{R}^n$ definimos la *forma inicial de f con respecto a w* como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Ideales iniciales

Sea $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Dado $w \in \mathbb{R}^n$ definimos la *forma inicial de f con respecto a w* como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ definimos su *ideal inicial con respecto a w* como $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$.

Ideales iniciales

Sea $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Dado $w \in \mathbb{R}^n$ definimos la *forma inicial de f con respecto a w* como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ definimos su *ideal inicial con respecto a w* como $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$.

Ejemplo

Para $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

Ideales iniciales

Sea $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Dado $w \in \mathbb{R}^n$ definimos la *forma inicial de f con respecto a w* como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ definimos su *ideal inicial con respecto a w* como $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$.

Ejemplo

Para $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ y $w = (1, 0, 0)$ se tiene

Ideales iniciales

Sea $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

Dado $w \in \mathbb{R}^n$ definimos la *forma inicial de f con respecto a w* como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ definimos su *ideal inicial con respecto a w* como $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$.

Ejemplo

Para $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ y $w = (1, 0, 0)$ se tiene

$$\text{in}_w(f) = x_2 x_3^3.$$

El abanico y las degeneraciones de Gröbner

Definición (Mora–Robbiano '88)

Dado un ideal homogéneo $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ su *abanico de Gröbner* $GF(J)$ es \mathbb{R}^n con la estructura de abanico dada por

El abanico y las degeneraciones de Gröbner

Definición (Mora–Robbiano '88)

Dado un ideal homogéneo $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ su *abanico de Gröbner* $GF(J)$ es \mathbb{R}^n con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \iff in_v(J) = in_w(J) =: in_C(J).$$

El abanico y las degeneraciones de Gröbner

Definición (Mora–Robbiano '88)

Dado un ideal homogéneo $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ su *abanico de Gröbner* $GF(J)$ es \mathbb{R}^n con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow in_v(J) = in_w(J) =: in_C(J).$$

Cada cono abierto $C^\circ \in GF(J)$ define una *degeneración de Gröbner*

El abanico y las degeneraciones de Gröbner

Definición (Mora–Robbiano '88)

Dado un ideal homogéneo $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ su *abanico de Gröbner* $GF(J)$ es \mathbb{R}^n con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow in_v(J) = in_w(J) =: in_C(J).$$

Cada cono abierto $C^\circ \in GF(J)$ define una *degeneración de Gröbner*

$$\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{A}^1$$

El abanico y las degeneraciones de Gröbner

Definición (Mora–Robbiano '88)

Dado un ideal homogéneo $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ su *abanico de Gröbner* $GF(J)$ es \mathbb{R}^n con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow \text{in}_v(J) = \text{in}_w(J) =: \text{in}_C(J).$$

Cada cono abierto $C^\circ \in GF(J)$ define una *degeneración de Gröbner*

$$\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{A}^1$$

dónde $\pi^{-1}(t) \cong V(J)$ para $t \neq 0$ y $\pi^{-1}(0) = V(\text{in}_C(J))$.

Ejemplo

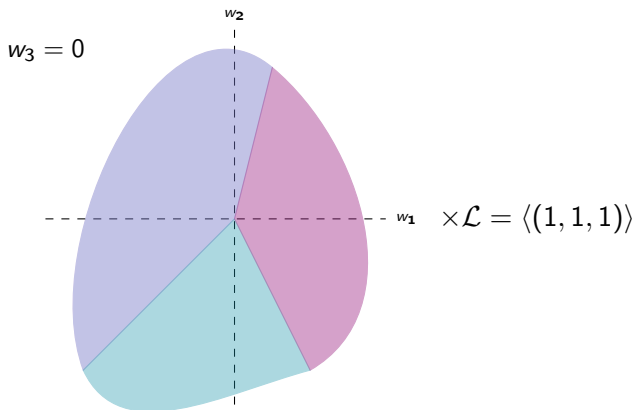
Sea $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

Ejemplo

Sea $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Entonces $GF(J)$ es \mathbb{R}^3 con la siguiente estructura de abanico:

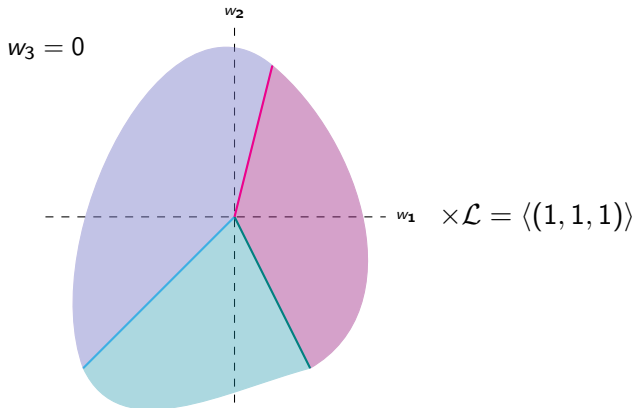
Ejemplo

Sea $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Entonces $GF(J)$ es \mathbb{R}^3 con la siguiente estructura de abanico:



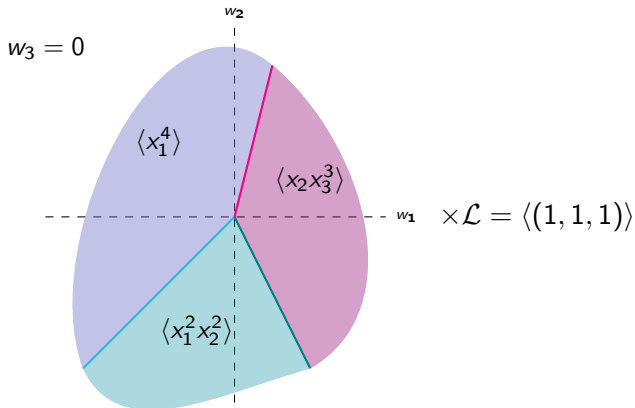
Ejemplo

Sea $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Entonces $GF(J)$ es \mathbb{R}^3 con la siguiente estructura de abanico:



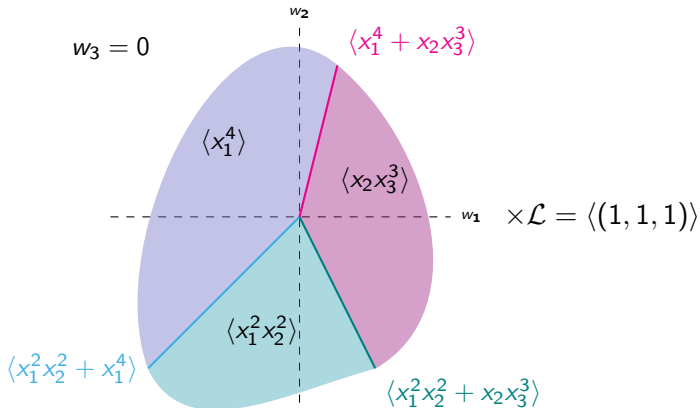
Ejemplo

Sea $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Entonces $GF(J)$ es \mathbb{R}^3 con la siguiente estructura de abanico:



Ejemplo

Sea $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Entonces $GF(J)$ es \mathbb{R}^3 con la siguiente estructura de abanico:



Bases de monomios estándar

Sea $A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ para $\tau \in GF(J)$.

Bases de monomios estándar

Sea $A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ para $\tau \in GF(J)$.

Fijamos un cono maximal $C \in GF(J)$, entonces el ideal $\text{in}_C(J)$ está generado por monomios.

Bases de monomios estándar

Sea $A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ para $\tau \in GF(J)$.

Fijamos un cono maximal $C \in GF(J)$, entonces el ideal $\text{in}_C(J)$ está generado por monomios. Para cada cara $\tau \subseteq C$ definimos

Bases de monomios estándar

Sea $A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ para $\tau \in GF(J)$.

Fijamos un cono maximal $C \in GF(J)$, entonces el ideal $\text{in}_C(J)$ está generado por monomios. Para cada cara $\tau \subseteq C$ definimos

$$\mathbb{B}_{C,\tau} := \{\bar{\mathbf{x}}^\alpha \in A_\tau \mid \mathbf{x}^\alpha \notin \text{in}_C(J)\}.$$

Bases de monomios estándar

Sea $A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ para $\tau \in GF(J)$.

Fijamos un cono maximal $C \in GF(J)$, entonces el ideal $\text{in}_C(J)$ está generado por monomios. Para cada cara $\tau \subseteq C$ definimos

$$\mathbb{B}_{C,\tau} := \{\bar{\mathbf{x}}^\alpha \in A_\tau \mid \mathbf{x}^\alpha \notin \text{in}_C(J)\}.$$

Entonces $\mathbb{B}_{C,\tau}$ es una base como espacio vectorial de A_τ , llamada *la base de monomios estándar*¹.

¹Introducida por Lakshmibai–Seshadri'88 y generalizada por Sturmfels–White'89.

Bases de monomios estándar

Sea $A := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ para $\tau \in GF(J)$.

Fijamos un cono maximal $C \in GF(J)$, entonces el ideal $\text{in}_C(J)$ está generado por monomios. Para cada cara $\tau \subseteq C$ definimos

$$\mathbb{B}_{C,\tau} := \{\bar{\mathbf{x}}^\alpha \in A_\tau \mid \mathbf{x}^\alpha \notin \text{in}_C(J)\}.$$

Entonces $\mathbb{B}_{C,\tau}$ es una base como espacio vectorial de A_τ , llamada *la base de monomios estándar*¹.

En particular, $\mathbb{B}_C := \mathbb{B}_{C,\{0\}}$ es una base de $A = A_{\{0\}}$.

\rightsquigarrow *Todas las degeneraciones $\{V(\text{in}_\tau(J)) : \tau \subseteq C\}$ comparten una base de monomios estándar!*

¹Introducida por Lakshmibai–Seshadri'88 y generalizada por Sturmfels–White'89.

Familias de ideales

Sea $C \in GF(J)$ un cono maximal y r_1, \dots, r_m representantes de los generadores primitivos de los rayos de $\overline{C} \in GF(J)/\mathcal{L}$.

Familias de ideales

Sea $C \in GF(J)$ un cono maximal y r_1, \dots, r_m representantes de los generadores primitivos de los rayos de $\overline{C} \in GF(J)/\mathcal{L}$. Sea r la matriz con renglones r_1, \dots, r_m .

Familias de ideales

Sea $C \in GF(J)$ un cono maximal y r_1, \dots, r_m representantes de los generadores primitivos de los rayos de $\overline{C} \in GF(J)/\mathcal{L}$. Sea r la matriz con renglones r_1, \dots, r_m . Para $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in J$ definimos

$$\mu(f) := \left(\min_{c_\alpha \neq 0} \{r_1 \cdot \alpha\}, \dots, \min_{c_\alpha \neq 0} \{r_m \cdot \alpha\} \right) \in \mathbb{Z}^m.$$

y en $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$ el *levantamiento* de f

Familias de ideales

Sea $C \in GF(J)$ un cono maximal y r_1, \dots, r_m representantes de los generadores primitivos de los rayos de $\overline{C} \in GF(J)/\mathcal{L}$. Sea \mathbf{r} la matriz con renglones r_1, \dots, r_m . Para $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in J$ definimos

$$\mu(f) := \left(\min_{c_\alpha \neq 0} \{r_1 \cdot \alpha\}, \dots, \min_{c_\alpha \neq 0} \{r_m \cdot \alpha\} \right) \in \mathbb{Z}^m.$$

y en $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$ el *levantamiento* de f

$$\tilde{f} := f(\mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1} x_1, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n} x_n) \mathbf{t}^{-\mu(f)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \alpha - \mu(f)}.$$

Familias de ideales

Sea $C \in GF(J)$ un cono maximal y r_1, \dots, r_m representantes de los generadores primitivos de los rayos de $\overline{C} \in GF(J)/\mathcal{L}$. Sea \mathbf{r} la matriz con renglones r_1, \dots, r_m . Para $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in J$ definimos

$$\mu(f) := (\min_{c_\alpha \neq 0} \{r_1 \cdot \alpha\}, \dots, \min_{c_\alpha \neq 0} \{r_m \cdot \alpha\}) \in \mathbb{Z}^m.$$

y en $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$ el *levantamiento* de f

$$\tilde{f} := f(\mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1} x_1, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n} x_n) \mathbf{t}^{-\mu(f)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \alpha - \mu(f)}.$$

Definición/Proposición

El *ideal levantado* $\tilde{J} := \langle \tilde{f} : f \in J \rangle \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$

Familias de ideales

Sea $C \in GF(J)$ un cono maximal y r_1, \dots, r_m representantes de los generadores primitivos de los rayos de $\overline{C} \in GF(J)/\mathcal{L}$. Sea \mathbf{r} la matriz con renglones r_1, \dots, r_m . Para $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in J$ definimos

$$\mu(f) := \left(\min_{c_\alpha \neq 0} \{r_1 \cdot \alpha\}, \dots, \min_{c_\alpha \neq 0} \{r_m \cdot \alpha\} \right) \in \mathbb{Z}^m.$$

y en $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$ el *levantamiento* de f

$$\tilde{f} := f(\mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1} x_1, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_n} x_n) \mathbf{t}^{-\mu(f)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \mathbf{t}^{\mathbf{r} \cdot \alpha - \mu(f)}.$$

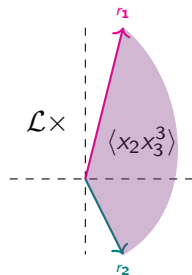
Definición/Proposición

El *ideal levantado* $\tilde{J} := \langle \tilde{f} : f \in J \rangle \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$ está generado por $\{\tilde{g} : g \in \mathcal{G}\}$, con \mathcal{G} una base de Gröbner^a para J y C .

^aEs decir, \mathcal{G} es un conjunto de generadores de J y además $\{\text{in}_C(g) : g \in \mathcal{G}\}$ es un conjunto de generadores de $\text{in}_C(J)$.

Ejemplo

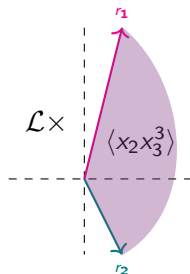
Tomemos $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$



Ejemplo

Tomemos $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
y consideremos el cono maximal C de $GF(\langle f \rangle)$
generado por \mathcal{L} y los renglones de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

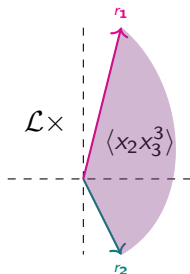
$$\tilde{f}(t_1, t_2) = f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2$$



Ejemplo

Tomemos $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
y consideremos el cono maximal C de $GF(\langle f \rangle)$
generado por \mathcal{L} y los renglones de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$



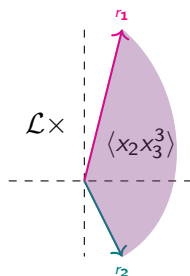
Ejemplo

Tomemos $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
y consideremos el cono maximal C de $GF(\langle f \rangle)$
generado por \mathcal{L} y los renglones de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Observa:

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$,



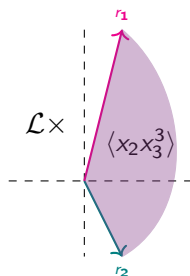
Ejemplo

Tomemos $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
y consideremos el cono maximal C de $GF(\langle f \rangle)$
generado por \mathcal{L} y los renglones de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Observa:

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$,
- $\tilde{f}(0, 1) = x_1^4 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_1}(f)$,



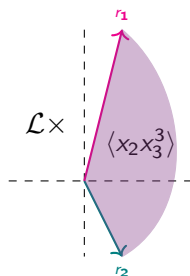
Ejemplo

Tomemos $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
y consideremos el cono maximal C de $GF(\langle f \rangle)$
generado por \mathcal{L} y los renglones de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Observa:

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$,
- $\tilde{f}(0, 1) = x_1^4 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_1}(f)$,
- $\tilde{f}(1, 0) = x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_2}(f)$,



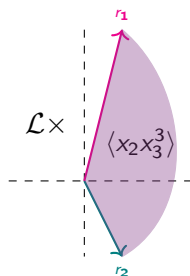
Ejemplo

Tomemos $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$
y consideremos el cono maximal C de $GF(\langle f \rangle)$
generado por \mathcal{L} y los renglones de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Observa:

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$,
- $\tilde{f}(0, 1) = x_1^4 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_1}(f)$,
- $\tilde{f}(1, 0) = x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_2}(f)$,
- $\tilde{f}(1, 1) = f$.



Primer teorema

Sea $\tilde{A} := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]/\tilde{J}$.

Primer teorema

Sea $\tilde{A} := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]/\tilde{J}$.

Teorema (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

Primer teorema

Sea $\tilde{A} := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]/\tilde{J}$.

Teorema (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

El álgebra \tilde{A} es **libre** como $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo con base \mathbb{B}_C .

Primer teorema

Sea $\tilde{A} := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]/\tilde{J}$.

Teorema (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

El álgebra \tilde{A} es **libre** como $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo con base $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}$. Además,

$$\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$$

es una familia libre (entonces, **plana**)

Primer teorema

Sea $\tilde{A} := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]/\tilde{J}$.

Teorema (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

El álgebra \tilde{A} es **libre** como $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo con base $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}$. Además,

$$\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$$

es una familia libre (entonces, **plana**) con fibra genérica $\text{Spec}(A)$

Primer teorema

Sea $\tilde{A} := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]/\tilde{J}$.

Teorema (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

El álgebra \tilde{A} es **libre** como $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo con base \mathbb{B}_C . Además,

$$\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$$

es una familia libre (entonces, **plana**) con fibra genérica $\text{Spec}(A)$ y para cada cara $\tau \subseteq C$ existe un $\mathbf{a}_\tau \in \mathbb{A}^m$ tal que $\pi^{-1}(\mathbf{a}_\tau) \cong \text{Spec}(A_\tau)$.

Primer teorema

Sea $\tilde{A} := \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]/\tilde{J}$.

Teorema (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

El álgebra \tilde{A} es **libre** como $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo con base \mathbb{B}_C . Además,

$$\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$$

es una familia libre (entonces, **plana**) con fibra genérica $\text{Spec}(A)$ y para cada cara $\tau \subseteq C$ existe un $\mathbf{a}_\tau \in \mathbb{A}^m$ tal que $\pi^{-1}(\mathbf{a}_\tau) \cong \text{Spec}(A_\tau)$.

Ejemplo

$$\tilde{A} = \mathbb{C}[t_1, t_2][x_1, x_2]/\langle t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle.$$

Familias tóricas

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. El esquema tórico asociado a un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ lo denotamos por $X_\Sigma \supset T_N$.

Definición

1

2

3

Familias tóricas

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. El esquema tórico asociado a un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ lo denotamos por $X_\Sigma \supset T_N$.

Definición

Sea \mathcal{A} una gavilla de álgebras finitamente generadas en X_Σ . El espectro relativo $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})^a$ es una *familia tórica* sobre X_Σ si:

1

2

3

^aSea $\bigcup_i U_i$ una cubierta abierta de X_Σ . El *espectro relativo* $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ es el esquema obtenido pegando las piezas afines $\mathbf{Spec}(\mathcal{A}(U_i))$.

Familias tóricas

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. El esquema tórico asociado a un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ lo denotamos por $X_\Sigma \supset T_N$.

Definición

Sea \mathcal{A} una gavilla de álgebras finitamente generadas en X_Σ . El espectro relativo $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})^a$ es una *familia tórica* sobre X_Σ si:

- 1 $\mathcal{A}(U)$ está positivamente graduada (para cada $U \subset X_\Sigma$ abierto) y plana como $\mathbb{C}[X_\Sigma]$ -módulo;
- 2
- 3

^aSea $\bigcup_i U_i$ una cubierta abierta de X_Σ . El *espectro relativo* $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ es el esquema obtenido pegando las piezas afines $\mathbf{Spec}(\mathcal{A}(U_i))$.

Familias tóricas

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. El esquema tórico asociado a un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ lo denotamos por $X_\Sigma \supset T_N$.

Definición

Sea \mathcal{A} una gavilla de álgebras finitamente generadas en X_Σ . El espectro relativo $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})^a$ es una **familia tórica** sobre X_Σ si:

- 1 $\mathcal{A}(U)$ está positivamente graduada (para cada $U \subset X_\Sigma$ abierto) y plana como $\mathbb{C}[X_\Sigma]$ -módulo;
- 2 \mathcal{A} es T_N -equivariante (compatible con la T_N -acción en X_Σ);
- 3

^aSea $\bigcup_i U_i$ una cubierta abierta de X_Σ . El **espectro relativo** $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ es el esquema obtenido pegando las piezas afines $\mathbf{Spec}(\mathcal{A}(U_i))$.

Familias tóricas

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. El esquema tórico asociado a un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ lo denotamos por $X_\Sigma \supset T_N$.

Definición

Sea \mathcal{A} una gavilla de álgebras finitamente generadas en X_Σ . El espectro relativo $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})^a$ es una **familia tórica** sobre X_Σ si:

- 1 $\mathcal{A}(U)$ está positivamente graduada (para cada $U \subset X_\Sigma$ abierto) y plana como $\mathbb{C}[X_\Sigma]$ -módulo;
- 2 \mathcal{A} es T_N -equivariante (compatible con la T_N -acción en X_Σ);
- 3 las fibras de $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ son reducidas.

^aSea $\bigcup_i U_i$ una cubierta abierta de X_Σ . El **espectro relativo** $\mathbf{Spec}(\mathcal{A})$ es el esquema obtenido pegando las piezas afines $\mathbf{Spec}(\mathcal{A}(U_i))$.

Clasificación de familias tóricas

Sean A y Σ como antes.

Clasificación de familias tóricas

Sean A y Σ como antes.

Theorem (Kaveh–Manon)

La información de una familia tórica en X_Σ con fibra genérica $\text{Spec}(A)$

Clasificación de familias tóricas

Sean A y Σ como antes.

Theorem (Kaveh–Manon)

*La información de una familia tórica en X_Σ con fibra genérica $\text{Spec}(A)$ es equivalente la información de una **valuación lineal por pedazos** $\nu : A \rightarrow \mathcal{P}_\Sigma$ con imagen finitamente generada.*

Clasificación de familias tóricas

Sean A y Σ como antes.

Theorem (Kaveh–Manon)

*La información de una familia tórica en X_Σ con fibra genérica $\text{Spec}(A)$ es equivalente la información de una **valuación lineal por pedazos** $\nu : A \rightarrow \mathcal{P}_\Sigma$ con imagen finitamente generada.*

Pregunta: ¿Qué es una valuación lineal por pedazos?

Valuaciones LP

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. Para un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ anotamos \mathcal{P}_Σ el conjunto de funciones $f : |\Sigma| \cap N \rightarrow \mathbb{Z}$ que son lineales por pedazos.

Valuaciones LP

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. Para un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ anotamos \mathcal{P}_Σ el conjunto de funciones $f : |\Sigma| \cap N \rightarrow \mathbb{Z}$ que son lineales por pedazos.

\mathcal{P}_Σ es un **semicampo**, para $a, b \in \mathcal{P}_\Sigma$ definimos:

$$(a \oplus b)(n) := \min\{a(n), b(n)\}, \quad (a \otimes b)(n) := a(n)b(n).$$

Valuaciones LP

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. Para un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ anotamos \mathcal{P}_Σ el conjunto de funciones $f : |\Sigma| \cap N \rightarrow \mathbb{Z}$ que son lineales por pedazos.

\mathcal{P}_Σ es un **semicampo**, para $a, b \in \mathcal{P}_\Sigma$ definimos:

$$(a \oplus b)(n) := \min\{a(n), b(n)\}, \quad (a \otimes b)(n) := a(n)b(n).$$

También, \mathcal{P}_Σ tiene un orden parcial: $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = a$.

Valuaciones LP

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. Para un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ anotamos \mathcal{P}_Σ el conjunto de funciones $f : |\Sigma| \cap N \rightarrow \mathbb{Z}$ que son lineales por pedazos.

\mathcal{P}_Σ es un **semicampo**, para $a, b \in \mathcal{P}_\Sigma$ definimos:

$$(a \oplus b)(n) := \min\{a(n), b(n)\}, \quad (a \otimes b)(n) := a(n)b(n).$$

También, \mathcal{P}_Σ tiene un orden parcial: $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = a$.

Definition

Una **valuación LP** (LP = lineal por pedazos) en una \mathbb{C} -álgebra

$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ es una aplicación $\nu : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_\Sigma$

Valuaciones LP

Sea $N = \mathbb{Z}^n$ y $M = N^*$. Para un abanico $\Sigma \subset N \otimes \mathbb{R}$ anotamos \mathcal{P}_Σ el conjunto de funciones $f : |\Sigma| \cap N \rightarrow \mathbb{Z}$ que son lineales por pedazos.

\mathcal{P}_Σ es un **semicampo**, para $a, b \in \mathcal{P}_\Sigma$ definimos:

$$(a \oplus b)(n) := \min\{a(n), b(n)\}, \quad (a \otimes b)(n) := a(n)b(n).$$

También, \mathcal{P}_Σ tiene un orden parcial: $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = a$.

Definition

Una **valuación LP** (LP = lineal por pedazos) en una \mathbb{C} -álgebra $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ es una aplicación $\nu : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_\Sigma$ tal que para todos $f, g \in A$

- 1 $\nu(fg) = \nu(f) \otimes \nu(g)$,
- 2 $\nu(f + g) \preceq \nu(f) \oplus \nu(g)$,
- 3 $\nu(c) = 0$ para $c \in \mathbb{C}$.

Valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Sea $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y C un cono maximal en $\text{GF}(J)$ y \mathbb{B}_C la base de monomios estándar.

Valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Sea $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y C un cono maximal en $\text{GF}(J)$ y \mathbb{B}_C la base de monomios estándar. Definimos la *valuación LP asociada a C* :

$$\nu_C : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_C,$$

Valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Sea $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y C un cono maximal en $\text{GF}(J)$ y \mathbb{B}_C la base de monomios estándar. Definimos la *valuación LP asociada a C*:

$$\begin{aligned} \nu_C : A - \{0\} &\rightarrow \mathcal{P}_C, \\ \mathbb{B}_C \ni \bar{\mathbf{x}}^\alpha &\mapsto (- \cdot \alpha : C \rightarrow \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

Valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Sea $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y C un cono maximal en $\text{GF}(J)$ y \mathbb{B}_C la base de monomios estándar. Definimos la *valuación LP asociada a C* :

$$\begin{aligned} \nu_C : A - \{0\} &\rightarrow \mathcal{P}_C, \\ \mathbb{B}_C \ni \bar{x}^\alpha &\mapsto (- \cdot \alpha : C \rightarrow \mathbb{Z}), \\ \sum_{\bar{x}^\alpha \in \mathbb{B}_C} c_\alpha \bar{x}^\alpha = f &\mapsto \min\{- \cdot \alpha : c_\alpha \neq 0\}. \end{aligned}$$

Valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Sea $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y C un cono maximal en $\text{GF}(J)$ y \mathbb{B}_C la base de monomios estándar. Definimos la *valuación LP asociada a C* :

$$\begin{aligned}\nu_C : A - \{0\} &\rightarrow \mathcal{P}_C, \\ \mathbb{B}_C \ni \bar{x}^\alpha &\mapsto (-\cdot \alpha : C \rightarrow \mathbb{Z}), \\ \sum_{\bar{x}^\alpha \in \mathbb{B}_C} c_\alpha \bar{x}^\alpha = f &\mapsto \min\{-\cdot \alpha : c_\alpha \neq 0\}.\end{aligned}$$

Como cada valuación LP nos da una *filtración de A* :

$$F_m(\nu_C) := \{f \in A : \nu_C(f) \succeq -\cdot m\} \quad \text{para } m \in M$$

Valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Sea $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ y C un cono maximal en $\text{GF}(J)$ y \mathbb{B}_C la base de monomios estándar. Definimos la *valuación LP asociada a C*:

$$\begin{aligned}\nu_C : A - \{0\} &\rightarrow \mathcal{P}_C, \\ \mathbb{B}_C \ni \bar{x}^\alpha &\mapsto (- \cdot \alpha : C \rightarrow \mathbb{Z}), \\ \sum_{\bar{x}^\alpha \in \mathbb{B}_C} c_\alpha \bar{x}^\alpha = f &\mapsto \text{mín}\{- \cdot \alpha : c_\alpha \neq 0\}.\end{aligned}$$

Como cada valuación LP nos da una *filtración de A*:

$F_m(\nu_C) := \{f \in A : \nu_C(f) \succeq - \cdot m\}$ para $m \in M$ y su *álgebra de Rees* es

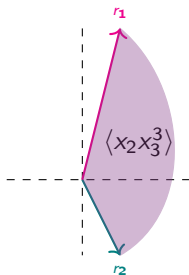
$$\mathcal{R}_C := \bigoplus_{m \in M} F_m(\nu_C) t^m,$$

aquí t^m representa al carácter de T_N .

Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.



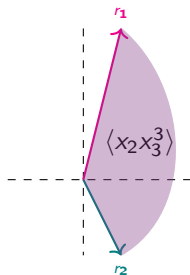
Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.

Entonces,

$$\mathbb{B}_C = \{ \bar{\mathbf{x}}^\alpha \in A : \mathbf{x}^\alpha \notin \langle x_2 x_3^3 \rangle \}.$$



Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

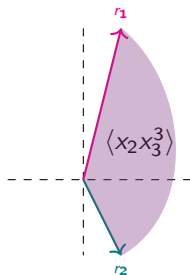
Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.

Entonces,

$$\mathbb{B}_C = \{ \bar{x}^\alpha \in A : \mathbf{x}^\alpha \notin \langle x_2 x_3^3 \rangle \}.$$

Por ejemplo, $\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2$ y \bar{x}_1^4 son elementos en \mathbb{B}_C .



Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

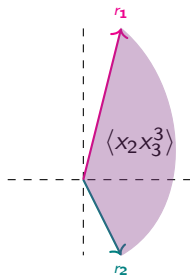
y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.

Entonces,

$$\mathbb{B}_C = \{ \bar{x}^\alpha \in A : \mathbf{x}^\alpha \notin \langle x_2 x_3^3 \rangle \}.$$

Por ejemplo, $\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2$ y \bar{x}_1^4 son elementos en \mathbb{B}_C .

Pregunta: ¿Qué es $\nu_C : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_C$?



Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.

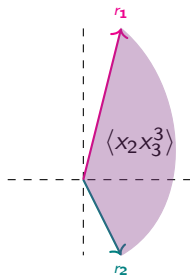
Entonces,

$$\mathbb{B}_C = \{ \bar{x}^\alpha \in A : \mathbf{x}^\alpha \notin \langle x_2 x_3^3 \rangle \}.$$

Por ejemplo, $\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2$ y \bar{x}_1^4 son elementos en \mathbb{B}_C .

Pregunta: ¿Qué es $\nu_C : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_C$?

$$\nu_C(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2) : \quad C \rightarrow \mathbb{Z},$$



Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.

Entonces,

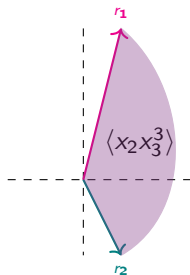
$$\mathbb{B}_C = \{ \bar{x}^\alpha \in A : \mathbf{x}^\alpha \notin \langle x_2 x_3^3 \rangle \}.$$

Por ejemplo, $\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2$ y \bar{x}_1^4 son elementos en \mathbb{B}_C .

Pregunta: ¿Qué es $\nu_C : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_C$?

$$\nu_C(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2) : C \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto 2(a + b) + 2(4a - 2b) = 10a - 2b.$$



Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.

Entonces,

$$\mathbb{B}_C = \{ \bar{x}^\alpha \in A : \mathbf{x}^\alpha \notin \langle x_2 x_3^3 \rangle \}.$$

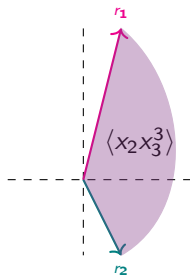
Por ejemplo, $\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2$ y \bar{x}_1^4 son elementos en \mathbb{B}_C .

Pregunta: ¿Qué es $\nu_C : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_C$?

$$\nu_C(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2) : C \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto 2(a + b) + 2(4a - 2b) = 10a - 2b.$$

$$\nu_C(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + \bar{x}_1^4) : C \rightarrow \mathbb{Z},$$



Ejemplo: valuaciones LP asociadas al abanico de Gröbner

Como antes, sean $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$

y $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $\text{in}_C(J) = \langle x_2 x_3^3 \rangle$.

Entonces,

$$\mathbb{B}_C = \{ \bar{x}^\alpha \in A : \mathbf{x}^\alpha \notin \langle x_2 x_3^3 \rangle \}.$$

Por ejemplo, $\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2$ y \bar{x}_1^4 son elementos en \mathbb{B}_C .

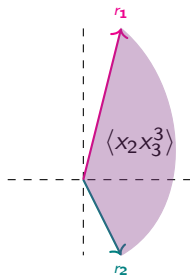
Pregunta: ¿Qué es $\nu_C : A - \{0\} \rightarrow \mathcal{P}_C$?

$$\nu_C(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2) : C \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto 2(a+b) + 2(4a-2b) = 10a - 2b.$$

$$\nu_C(\bar{x}_1^2 \bar{x}_2^2 + \bar{x}_1^4) : C \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \min \left\{ \begin{matrix} 10a - 2b, \\ 4(a+b) \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 10a - 2b, & b \leq a \\ 4a + 4b, & b \geq a \end{cases}.$$



La familia tórica de la valuación LP ν_C

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono máximo. Recuerda $A_\tau = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$.

La familia tórica de la valuación LP ν_C

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono máximo. Recuerda $A_\tau = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$.

Teorema (Kaveh–Manon)

El álgebra de Rees \mathcal{R}_C es una suma directa de haces de líneas sobre X_C .

La familia tórica de la valuación LP ν_C

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono máximo. Recuerda $A_\tau = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$.

Teorema (Kaveh–Manon)

El álgebra de Rees \mathcal{R}_C es una suma directa de haces de líneas sobre X_C . Además $\psi : \text{Spec}(\mathcal{R}_C) \rightarrow X_C$ define una *familia tórica* con las propiedades:

La familia tórica de la valuación LP ν_C

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono máximo. Recuerda $A_\tau = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$.

Teorema (Kaveh–Manon)

El álgebra de Rees \mathcal{R}_C es una suma directa de haces de líneas sobre X_C . Además $\psi : \text{Spec}(\mathcal{R}_C) \rightarrow X_C$ define una *familia tórica* con las propiedades:

- las fibras genéricas son isomorfas a $\text{Spec}(A)$, y

La familia tórica de la valuación LP ν_C

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono máximo. Recuerda $A_\tau = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$.

Teorema (Kaveh–Manon)

El álgebra de Rees \mathcal{R}_C es una suma directa de haces de líneas sobre X_C . Además $\psi : \text{Spec}(\mathcal{R}_C) \rightarrow X_C$ define una *familia tórica* con las propiedades:

- las fibras genéricas son isomorfas a $\text{Spec}(A)$, y
- $\psi^{-1}(p) \cong \text{Spec}(A_\tau)$ para todos $p \in \mathcal{O}_\tau$ la T_N -órbita en X_C que corresponde a la cara $\tau \subseteq C$.

Segundo Teorema

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono maximal con m rayos, X_C la variedad tórica asociada.

Segundo Teorema

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono maximal con m rayos, X_C la variedad tórica asociada. Hay un morfismo $\bar{p}_C : \mathbb{A}^m \rightarrow X_C$ (dado por la *construcción de Cox* \rightsquigarrow siguiente diapositiva)

Segundo Teorema

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono maximal con m rayos, X_C la variedad tórica asociada. Hay un morfismo $\bar{p}_C : \mathbb{A}^m \rightarrow X_C$ (dado por la *construcción de Cox* \rightsquigarrow siguiente diapositiva)

Teorema (B–Mohammadi–Nájera Chávez)

El morfismo $\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$ se completa a un *diagrama de pullback*:

Segundo Teorema

Sea $C \in \text{GF}(J)$ un cono maximal con m rayos, X_C la variedad tórica asociada. Hay un morfismo $\bar{\rho}_C : \mathbb{A}^m \rightarrow X_C$ (dado por la *construcción de Cox* \rightsquigarrow siguiente diapositiva)

Teorema (B–Mohammadi–Nájera Chávez)

El morfismo $\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$ se completa a un *diagrama de pullback*:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\mathcal{R}_C) & \longleftarrow & \text{Spec}(\tilde{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_C & \longleftarrow & \mathbb{A}^m \end{array},$$

donde $\psi : \text{Spec}(\mathcal{R}_C) \rightarrow X_C$ es la familia tórica definida por la valuación LP ν_C .

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \cdots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \cdots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \cdots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

$$G = \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y_1^{r_1 \cdot e_i} y_2^{r_2 \cdot e_i} = 1, i = 1, 2\}$$

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \dots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} G &= \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y_1^{r_1 \cdot e_i} y_2^{r_2 \cdot e_i} = 1, i = 1, 2\} \\ &= \{(y, y^2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y^3 = 1\} = \end{aligned}$$

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \cdots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} G &= \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y_1^{r_1 \cdot e_i} y_2^{r_2 \cdot e_i} = 1, i = 1, 2\} \\ &= \{(y, y^2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y^3 = 1\} = \{(y, y^2) : y \in \{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\}\}. \end{aligned}$$

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \dots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} G &= \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y_1^{r_1 \cdot e_i} y_2^{r_2 \cdot e_i} = 1, i = 1, 2\} \\ &= \{(y, y^2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y^3 = 1\} = \{(y, y^2) : y \in \{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\}\}. \end{aligned}$$

El morfismo $\bar{p}_C : \mathbb{A}^2 \rightarrow X_C$ viene de $p_C : \mathbb{Z}^2 \rightarrow N, e_i \mapsto r_i, i = 1, 2$.

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \dots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} G &= \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y_1^{r_1 \cdot e_i} y_2^{r_2 \cdot e_i} = 1, i = 1, 2\} \\ &= \{(y, y^2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y^3 = 1\} = \{(y, y^2) : y \in \{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\}\}. \end{aligned}$$

El morfismo $\bar{p}_C : \mathbb{A}^2 \rightarrow X_C$ viene de $p_C : \mathbb{Z}^2 \rightarrow N, e_i \mapsto r_i, i = 1, 2$. Se extiende a

$$\begin{aligned} p_C \otimes 1 : (\mathbb{C}^*)^2 = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{C}^* &\rightarrow N \otimes \mathbb{C}^* = T_N \subset X_C, \\ (t^{u_1}, t^{u_2}) = u \otimes t &\mapsto p_C(u) \otimes t = (t^{u_1+u_2}, t^{4u_1-2u_2}). \end{aligned}$$

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \dots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} G &= \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y_1^{r_1 \cdot e_i} y_2^{r_2 \cdot e_i} = 1, i = 1, 2\} \\ &= \{(y, y^2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y^3 = 1\} = \{(y, y^2) : y \in \{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\}\}. \end{aligned}$$

El morfismo $\bar{p}_C : \mathbb{A}^2 \rightarrow X_C$ viene de $p_C : \mathbb{Z}^2 \rightarrow N, e_i \mapsto r_i, i = 1, 2$. Se extiende a

$$\begin{aligned} p_C \otimes 1 : (\mathbb{C}^*)^2 = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{C}^* &\rightarrow N \otimes \mathbb{C}^* = T_N \subset X_C, \\ (t^{u_1}, t^{u_2}) = u \otimes t &\mapsto p_C(u) \otimes t = (t^{u_1+u_2}, t^{4u_1-2u_2}). \end{aligned}$$

Ejercicio: $G = \ker(p_C \otimes 1)$.

Sobre la construcción de Cox

El esquema X_C es el *cociente casi geométrico* $\mathbb{A}^m // G$ con

$$G = \{(t_1, \dots, t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m : t_1^{r_1 \cdot e_i} \dots t_m^{r_m \cdot e_i} = 1 \ \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de la latiz dual M .

En el ejemplo $C = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} G &= \{(y_1, y_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y_1^{r_1 \cdot e_i} y_2^{r_2 \cdot e_i} = 1, i = 1, 2\} \\ &= \{(y, y^2) \in (\mathbb{C}^*)^2 : y^3 = 1\} = \{(y, y^2) : y \in \{1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}\}\}. \end{aligned}$$

El morfismo $\bar{p}_C : \mathbb{A}^2 \rightarrow X_C$ viene de $p_C : \mathbb{Z}^2 \rightarrow N, e_i \mapsto r_i, i = 1, 2$. Se extiende a

$$\begin{aligned} p_C \otimes 1 : (\mathbb{C}^*)^2 = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{C}^* &\rightarrow N \otimes \mathbb{C}^* = T_N \subset X_C, \\ (t^{u_1}, t^{u_2}) = u \otimes t &\mapsto p_C(u) \otimes t = (t^{u_1+u_2}, t^{4u_1-2u_2}). \end{aligned}$$

Ejercicio: $G = \ker(p_C \otimes 1)$.

Entonces el morfismo tórico $p_C : \mathbb{A}^2 \rightarrow X_C$ es *constante en G -oribtas*.

Prueba del segundo teorema

Si $\mathcal{R}_C \otimes_{\mathbb{C}[X_C]} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \cong \tilde{A}$ eso implica que entre las algebras el *diagrama es un pushout*:

Prueba del segundo teorema

Si $\mathcal{R}_C \otimes_{\mathbb{C}[X_C]} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \cong \tilde{A}$ eso implica que entre las algebras el *diagrama es un pushout*:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_C & \longrightarrow & \tilde{A} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C] & \longrightarrow & \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \end{array}$$

Prueba del segundo teorema

Si $\mathcal{R}_C \otimes_{\mathbb{C}[X_C]} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \cong \tilde{A}$ eso implica que entre las algebras el *diagrama es un pushout*:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_C & \longrightarrow & \tilde{A} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C] & \longrightarrow & \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \end{array}$$

Usando [Kaveh–Manon] se puede mostrar

$$\mathcal{R}_C \cong \mathbb{C}[X_C][x_1, \dots, x_n] / \hat{J}$$

con \hat{J} generado de $\{\hat{g} : g \in \mathcal{G}\}$ y $\bar{p}_C^*(\hat{g}) = \tilde{g}$ (aquí tomamos la extensión $\bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C][x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$).

Prueba del segundo teorema

Si $\mathcal{R}_C \otimes_{\mathbb{C}[X_C]} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \cong \tilde{A}$ eso implica que entre las algebras el *diagrama es un pushout*:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_C & \longrightarrow & \tilde{A} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C] & \longrightarrow & \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \end{array}$$

Usando [Kaveh–Manon] se puede mostrar

$$\mathcal{R}_C \cong \mathbb{C}[X_C][x_1, \dots, x_n] / \hat{J}$$

con \hat{J} generado de $\{\hat{g} : g \in \mathcal{G}\}$ y $\bar{p}_C^*(\hat{g}) = \tilde{g}$ (aquí tomamos la extensión $\bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C][x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n]$).

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C \otimes_{\mathbb{C}[X_C]} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] &\cong \left(\mathbb{C}[X_C][x_1, \dots, x_n] / \hat{J} \right) \otimes_{\mathbb{C}[X_C]} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \\ &\cong \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m][x_1, \dots, x_n] / \tilde{J} = \tilde{A}. \end{aligned}$$

Ejemplo: Prueba del segundo teorema

Sea $C = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $J = \langle f \rangle$. Ya vimos $\tilde{J} = \langle \tilde{f} \rangle$ y

$$\tilde{f} = t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3.$$

Ejemplo: Prueba del segundo teorema

Sea $C = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $J = \langle f \rangle$. Ya vimos $\tilde{J} = \langle \tilde{f} \rangle$ y $\tilde{f} = t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3$. Tenemos $\hat{J} = \langle \hat{f} \rangle$ y

$$\hat{f} = x_2 x_3^3 + t^{(-2,-1,3)} x_1^2 x_2^2 + t^{(-4,1,3)} x_1^4 \in \mathbb{C}[X_C][x_1, x_2, x_3],$$

con $\mathbb{C}[X_C] = \mathbb{C}[-C^\vee \cap M]$.

Ejemplo: Prueba del segundo teorema

Sea $C = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $J = \langle f \rangle$. Ya vimos $\tilde{J} = \langle \tilde{f} \rangle$ y $\tilde{f} = t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3$. Tenemos $\hat{J} = \langle \hat{f} \rangle$ y

$$\hat{f} = x_2 x_3^3 + t^{(-2,-1,3)} x_1^2 x_2^2 + t^{(-4,1,3)} x_1^4 \in \mathbb{C}[X_C][x_1, x_2, x_3],$$

con $\mathbb{C}[X_C] = \mathbb{C}[-C^\vee \cap M]$. El morfismo $\bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C] \rightarrow \mathbb{C}[t_1, t_2]$ viene de $p_C^\vee : M \rightarrow \mathbb{Z}^2$ definida por la matriz transpuesta $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Prueba del segundo teorema

Sea $C = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $J = \langle f \rangle$. Ya vimos $\tilde{J} = \langle \tilde{f} \rangle$ y $\tilde{f} = t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3$. Tenemos $\hat{J} = \langle \hat{f} \rangle$ y

$$\hat{f} = x_2 x_3^3 + t^{(-2,-1,3)} x_1^2 x_2^2 + t^{(-4,1,3)} x_1^4 \in \mathbb{C}[X_C][x_1, x_2, x_3],$$

con $\mathbb{C}[X_C] = \mathbb{C}[-C^\vee \cap M]$. El morfismo $\bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C] \rightarrow \mathbb{C}[t_1, t_2]$ viene de $p_C^\vee : M \rightarrow \mathbb{Z}^2$ definida por la matriz transpuesta $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos

$$\bar{p}_C^* \left(t^{(-2,-1,3)} \right) = \mathbf{t}^{p_C^\vee(2,1,-3)} = t_1^6,$$

Ejemplo: Prueba del segundo teorema

Sea $C = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $J = \langle f \rangle$. Ya vimos $\tilde{J} = \langle \tilde{f} \rangle$ y $\tilde{f} = t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3$. Tenemos $\hat{J} = \langle \hat{f} \rangle$ y

$$\hat{f} = x_2 x_3^3 + t^{(-2,-1,3)} x_1^2 x_2^2 + t^{(-4,1,3)} x_1^4 \in \mathbb{C}[X_C][x_1, x_2, x_3],$$

con $\mathbb{C}[X_C] = \mathbb{C}[-C^\vee \cap M]$. El morfismo $\bar{\rho}_C^* : \mathbb{C}[X_C] \rightarrow \mathbb{C}[t_1, t_2]$ viene de $\rho_C^\vee : M \rightarrow \mathbb{Z}^2$ definida por la matriz transpuesta $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_C^* \left(t^{(-2,-1,3)} \right) &= \mathbf{t}^{\rho_C^\vee(2,1,-3)} = t_1^6, \\ \text{y } \bar{\rho}_C^* \left(t^{(-4,1,3)} \right) &= \mathbf{t}^{\rho_C^\vee(4,-1,-3)} = t_2^6, \end{aligned}$$

Ejemplo: Prueba del segundo teorema

Sea $C = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle \in \text{GF}(J)$ con $J = \langle f \rangle$. Ya vimos $\tilde{J} = \langle \tilde{f} \rangle$ y $\tilde{f} = t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3$. Tenemos $\hat{J} = \langle \hat{f} \rangle$ y

$$\hat{f} = x_2 x_3^3 + t^{(-2,-1,3)} x_1^2 x_2^2 + t^{(-4,1,3)} x_1^4 \in \mathbb{C}[X_C][x_1, x_2, x_3],$$

con $\mathbb{C}[X_C] = \mathbb{C}[-C^\vee \cap M]$. El morfismo $\bar{p}_C^* : \mathbb{C}[X_C] \rightarrow \mathbb{C}[t_1, t_2]$ viene de $p_C^\vee : M \rightarrow \mathbb{Z}^2$ definida por la matriz transpuesta $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos

$$\begin{aligned} \bar{p}_C^* \left(t^{(-2,-1,3)} \right) &= \mathbf{t}^{p_C^\vee(2,1,-3)} = t_1^6, \\ \text{y } \bar{p}_C^* \left(t^{(-4,1,3)} \right) &= \mathbf{t}^{p_C^\vee(4,-1,-3)} = t_2^6, \end{aligned}$$

que implica:

$$\begin{aligned} \bar{p}_C^*(\hat{f}) &= x_2 x_3^3 + \bar{p}_C^* \left(t^{(-2,-1,3)} \right) x_1^2 x_2^2 + \bar{p}_C^* \left(t^{(-4,1,3)} \right) x_1^4 \\ &= x_2 x_3^3 + x_1^2 x_2^2 t_1^6 + x_1^4 t_2^6 = \tilde{f}. \end{aligned}$$

Historía del proyecto

- Primer objetivo: entender las *álgebras de conglomero con coeficientes universales*.
- Resulta que, las álgebras de conglomero con coeficientes universales asociadas a las Grassmannianas $\text{Gr}(2, \mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}(3, \mathbb{C}^6)$ son de la forma \tilde{A} (para un ideal específico y un cono maximal único en su abanico de Gröbner).

Historía del proyecto

- Primer objetivo: entender las *álgebras de conglomero con coeficientes universales*.
- Resulta que, las álgebras de conglomero con coeficientes universales asociadas a las Grassmannianas $\text{Gr}(2, \mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}(3, \mathbb{C}^6)$ son de la forma \tilde{A} (para un ideal específico y un cono maximal único en su abanico de Gröbner).
- Hay muchos detalles en el artículo sobre la construcción para Grassmannianas.

Historía del proyecto

- Primer objetivo: entender las *álgebras de conglomero con coeficientes universales*.
- Resulta que, las álgebras de conglomero con coeficientes universales asociadas a las Grassmannianas $\text{Gr}(2, \mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}(3, \mathbb{C}^6)$ son de la forma \tilde{A} (para un ideal específico y un cono maximal único en su abanico de Gröbner).
- Hay muchos detalles en el artículo sobre la construcción para Grassmannianas.

¡Muchas gracias!

Bibliografía

- BMN** Lara Bossinger, Fatemeh Mohammadi, Alfredo Nájera Chávez. Gröbner degenerations of Grassmannians and universal cluster algebras. *arxiv preprint arXiv:2007.14972 [math.AG]*, (2020)
- Cox** David A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.*, 4(1):17–50 (1995)
- CLS** David A. Cox, John Little, Hal Schenck. Toric Varieties. Graduate Studies in Mathematics, 124. *American Mathematical Society*, Providence, RI, 2011. xxiv+841 pp. ISBN: 978-0-8218-4819-7
- KM** Kiumars Kaveh and Christopher Manon. Toric bundles, valuations, and tropical geometry over semifield of piecewise linear functions. *arXiv preprint arXiv:1907.00543 [math.AG]*, (2019)