

La diversidad de las álgebras de conglomerado

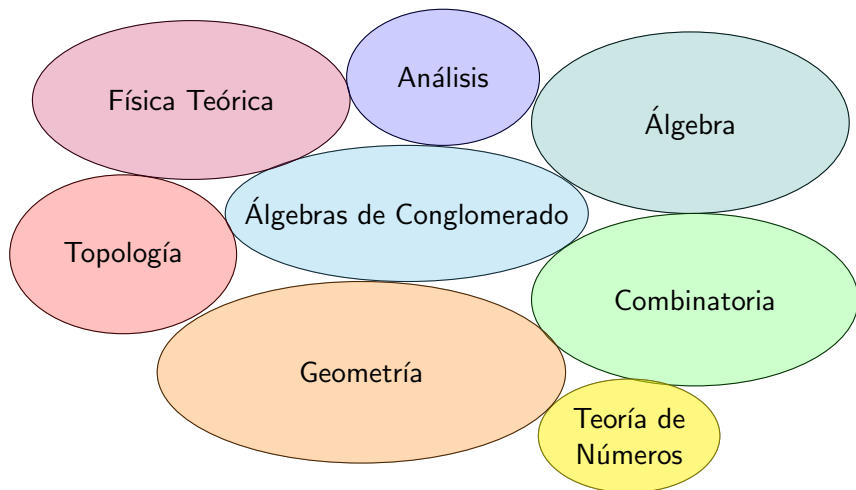
Lara Bossinger



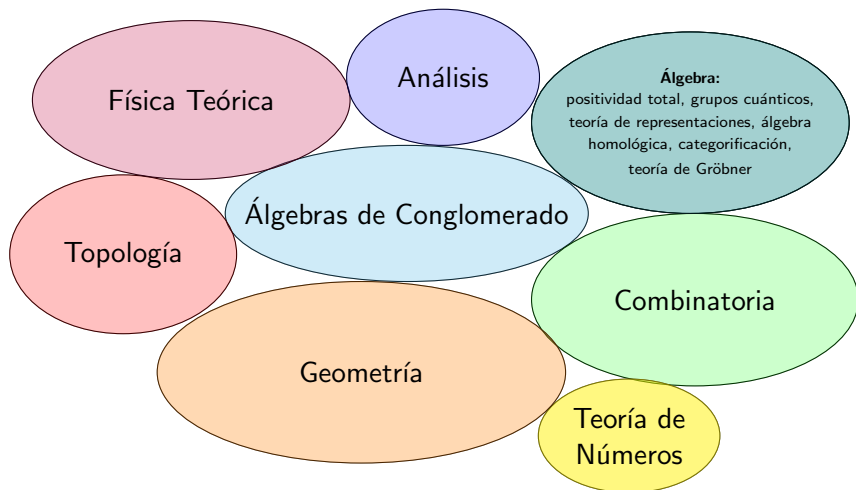
Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

Coloquio CINVESTAV, 14 de agosto 2025

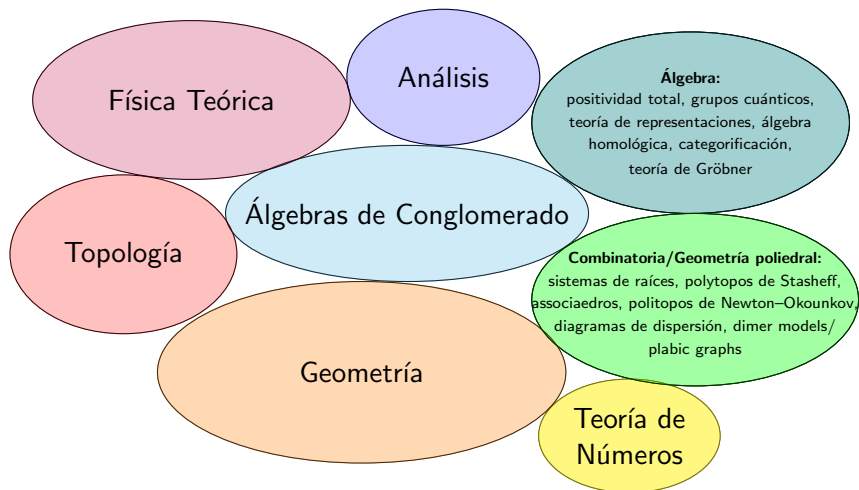
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



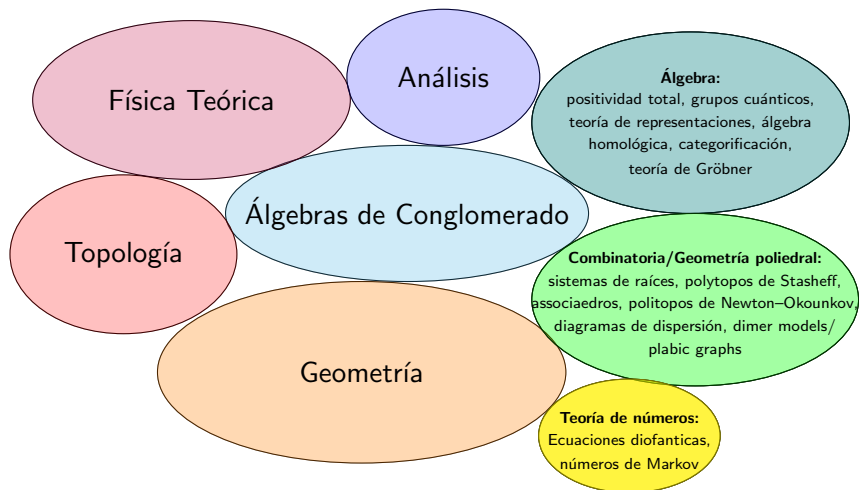
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



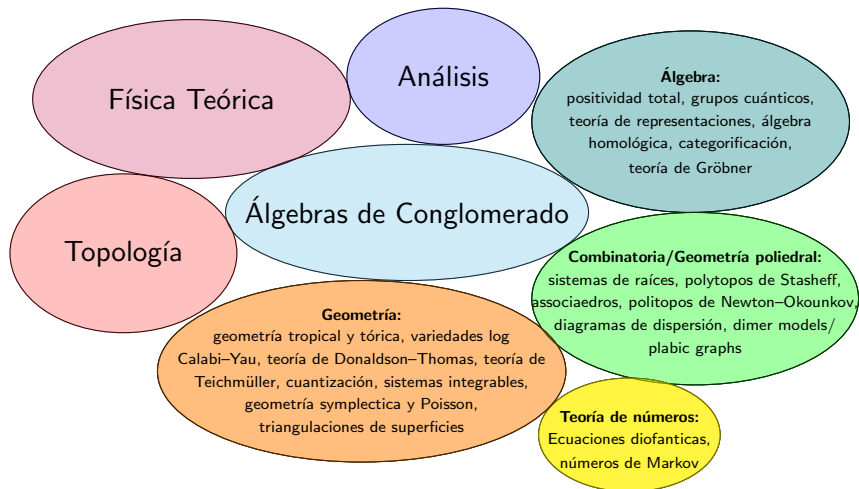
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



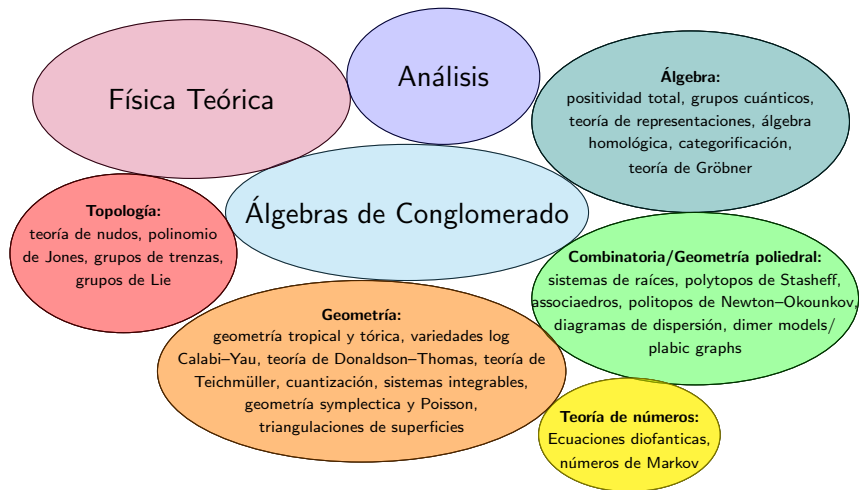
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



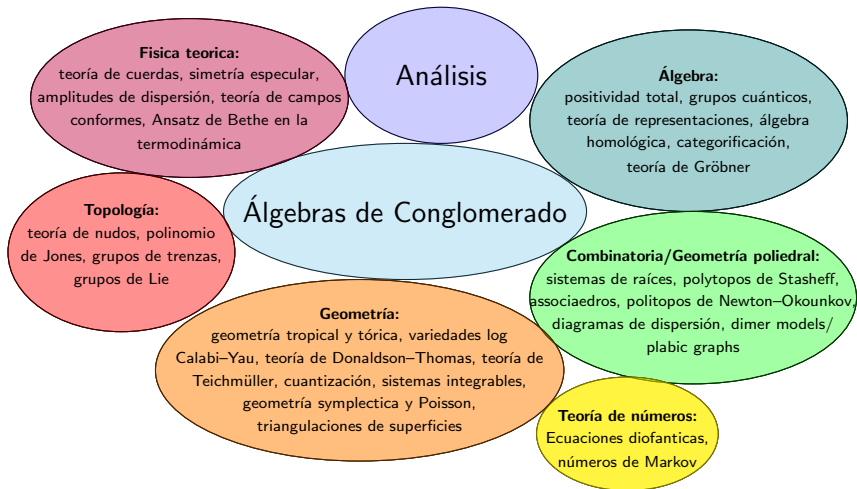
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



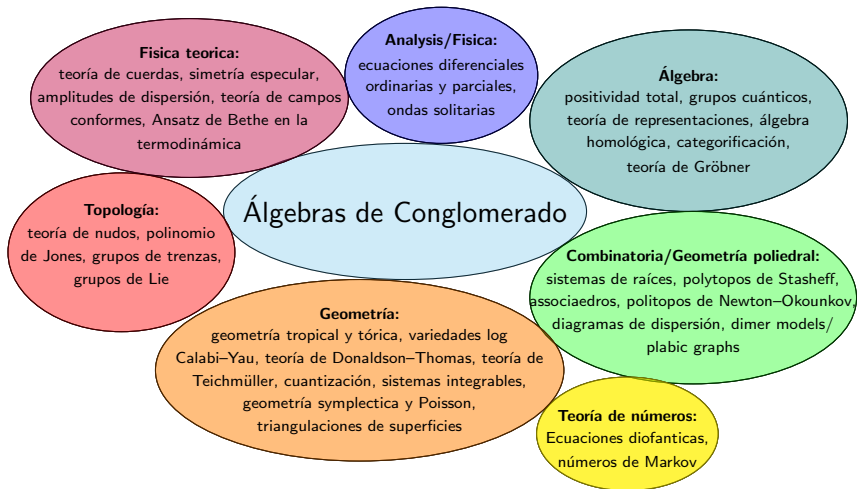
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



Historia

- Dos rusos Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky definieron las álgebras de conglomerado en 2001



©<http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin>



©<https://opc.mfo.de>

- Observaron la *estructura de conglomerado* en la teoría de positividad total de matrices, en grupos cuánticos y sus bases canónicas.
- ahora tienen su propio clasificación 13F60
- y hay más que 1,755 artículos y desde 2003 había más que 139 eventos sobre el álgebra de conglomerado

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = \det \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 10$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \Delta_{13} = 1, \Delta_{14} = 1, \Delta_{23} = 6, \Delta_{24} = 10, \Delta_{34} = \det \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = 10, \quad \Delta_{34} = 2.$$

Observamos: $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = 10, \quad \Delta_{34} = 2.$$

Observamos: $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ cumple $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = 10, \quad \Delta_{34} = 2.$$

Observamos: $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ cumple $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

Pregunta: ¿Como podemos verificar *eficientemente* si M es totalmente positiva o no?

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34} > 0$. Pues, en este caso también

$$\Delta_{24} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} > 0.$$

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34} > 0$. Pues, en este caso también

$$\Delta_{24} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} > 0.$$

El conjunto $\{\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}\}$ se llama un *test de positividad*.

Pregunta: ¿Como podemos encontrar los tests de positividad?

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34} > 0$. Pues, en este caso también

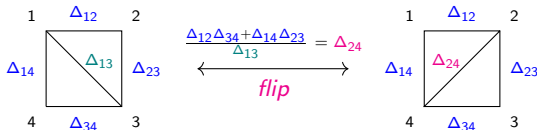
$$\Delta_{24} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} > 0.$$

El conjunto $\{\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}\}$ se llama un *test de positividad*.

Pregunta: ¿Como podemos encontrar los tests de positividad?

Para $\mathbb{R}^{2 \times 4}$ tenemos otro test de positividad: $\{\Delta_{24}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}\}$.

Los dos se pueden visualizar usando las triangulaciones del cuadrado:



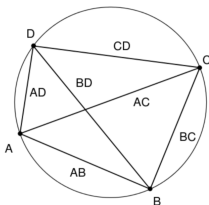
Ptolomeo y test de positividad

¿Les parece conocida?

Ptolomeo y test de positividad

¿Les parece conocida?

La relación de Ptolomeo: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$



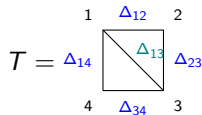
Consecuencia: $\left\{ \begin{array}{c} \text{test de positividad} \\ \text{eficiente} \end{array} \right\} \stackrel{1-1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{triangulación} \\ \text{del } n\text{-ágono} \end{array} \right\}.$

$\Rightarrow$ *una* triangulación contiene la información de *todos* test de positividad usando los *flips*.

El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_T$

$\rightsquigarrow$ Esta información la usamos para definir un *álgebra de conglomerado* $\mathcal{A}_T$ asociada a una triangulación T

$\mathcal{A}_T$ es el subálgebra de $\mathbb{Q}(\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34})$ generado de todas los menores obtenidos de T con flips

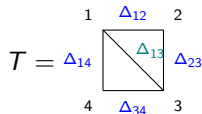


$$\mathcal{A}_T = \left\langle \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}, \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \Delta_{24} \right\rangle$$

El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_T$

↪ Esta información la usamos para definir un *álgebra de conglomerado* $\mathcal{A}_T$ asociada a una triangulación T

$\mathcal{A}_T$ es el subálgebra de $\mathbb{Q}(\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34})$ generado de todas los menores obtenidos de T con flips



$$\mathcal{A}_T = \left\langle \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}, \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \Delta_{24} \right\rangle$$

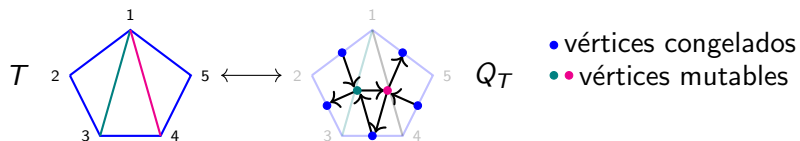
Nota: $\mathcal{A}_T$ es el anillo de coordenadas de la *Grassmanniana* $\text{Gr}_2(4)$.

$$\text{Gr}_k(n) := \{V \subset \mathbb{K}^n : \dim_{\mathbb{K}}(V) = k\}.$$

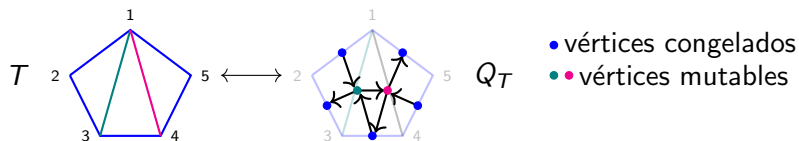
Teorema (Scott 2006)

El anillo de coordenadas de la Grassmanniana $\text{Gr}_k(n)$ en su encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado.

Carcaj y mutación de carcaj



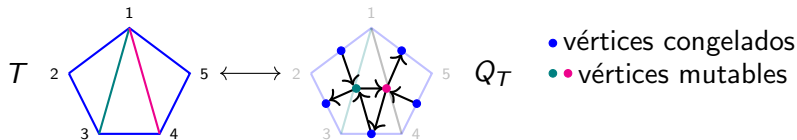
Carcaj y mutación de carcaj



Definición (Mutación de carcaj)

Q carcaj sin 1 y 2-ciclos. La mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k mutable es:
 $\forall i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega $i \rightarrow j$, invierte cada flecha en k , y elimina 2-ciclos.

Carcaj y mutación de carcaj



Definición (Mutación de carcaj)

Q carcaj sin 1 y 2-ciclos. La mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k mutable es:
 $\forall i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega $i \rightarrow j$, invierte cada flecha en k , y elimina 2-ciclos.

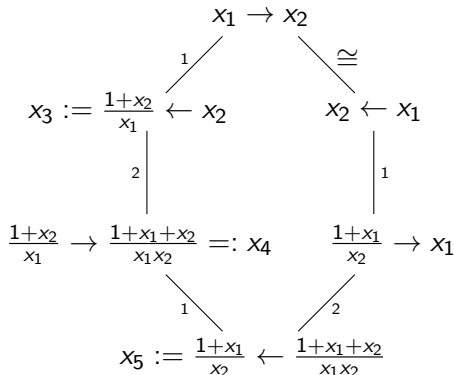
$$\Delta_{ik} \Delta_{jl} = \Delta_{ij} \Delta_{kl} + \Delta_{il} \Delta_{jk} \quad \longleftrightarrow \quad x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j.$$

Definición (Mutación de semillas)

Dado una semilla $s = (\mathbf{x}, Q)$ y un vertex mutable k de Q , la *mutación en la dirección k* $\mu_k(s)$ es el par $(\mu_k(\mathbf{x}), \mu_k(Q))$, donde $\mu_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}$.

Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



Definimos el *álgebra de conglomerado*:

$$\mathcal{A}_Q := \left\langle x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\rangle \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2)$$

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Conjectura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado están contenidos en $\mathbb{N}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Conjetura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado están contenidos en $\mathbb{N}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Teorema de Positividad (Gross–Hacking–Keel–Kontsevich 2014)

La conjetura de positividad es verdadera.

Gross–Hacking–Keel–Kontsevich ven las álgebras de conglomerado como anillos de funciones en variedades log Calabi–Yau (*variedades de conglomerado*) y usan herramientas de la geometría biracional y la simetría especular (mirror symmetry).

Clasificación de tipo finito (Fomin–Zelevinsky 2003)

El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_Q$ es de *tipo finito* (el conjunto de semillas es finito)

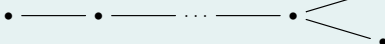
Clasificación de tipo finito (Fomin–Zelevinsky 2003)

El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_Q$ es de *tipo finito* (el conjunto de semillas es finito) si y solo si (la parte mutable de) Q es equivalente bajo mutación a una orientación de un diagrama de Dynkin de tipo ADE:

A_n :



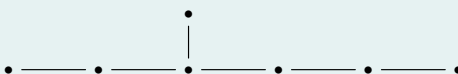
D_n :



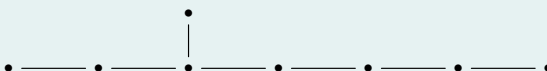
E_6 :



E_7 :



E_8 :



Ejemplos de estructuras de conglomerado

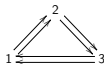
① Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,

Ejemplos de estructuras de conglomerado

① Los triples de Markov

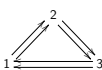
- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$



y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

Ejemplos de estructuras de conglomerado

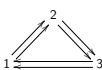
1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$  y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$  y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

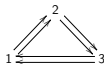
2 El polinomio de Jones:

nudo o enlace de 2 puentes L $\rightsquigarrow$ fracción continua $\rightsquigarrow$ grafo serpiente $\rightsquigarrow$ variable de conglomerado x_L

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$



- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

2 El polinomio de Jones:

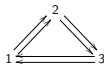
nudo o enlace de 2 puentes L $\rightsquigarrow$ fracción continua $\rightsquigarrow$ grafo serpiente $\rightsquigarrow$ variable de conglomerado x_L

[Lee-Schiffler] El polinomio de Jones de L (hasta la normalización por el término principal) es igual al polinomio de Laurent de x_L (hasta una especialización de coeficientes).

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$



- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

2 El polinomio de Jones:

nudo o enlace de 2 puentes L $\rightsquigarrow$ fracción continua $\rightsquigarrow$ grafo serpiente $\rightsquigarrow$ variable de conglomerado x_L

[Lee-Schiffler] El polinomio de Jones de L (hasta la normalización por el término principal) es igual al polinomio de Laurent de x_L (hasta una especialización de coeficientes).

3 Las amplitudes de dispersión...

Symbols for scattering amplitudes

Feynman integrals for scattering amplitudes often evaluate to polylogarithms, defined recursively by iterated integrals

$$G(a_1, \dots, a_n; z) = \int_0^z \frac{dt}{t-a_1} G(a_2, \dots, a_n; t), \quad G(; z) = 1$$

The differential structure

$$dG(a_{n-1}, \dots, a_1; a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} G(a_{n-1}, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_1; z) d \log \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i - a_{i-1}}$$

motivates the definition of the *symbol map*

$$\mathcal{S}(G(a_{n-1}, \dots, a_1; a_n)) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{S}(G(a_{n-1}, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_1; z)) \otimes \frac{a_i - a_{i+1}}{a_i - a_{i-1}}$$

applied iteratively it associates a tensor product (called *word*) in variables (called *letters*),

Example: symbol

e.g. $\mathcal{S}(\mathrm{Li}_n(z)) = -(1-z) \otimes z \otimes \cdots \otimes z$.

$$\mathrm{Li}_k(z) = \int_0^z \mathrm{Li}_{k-1}(t) d \log t, \quad \mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z) \quad (15)$$

clearly have

$$\mathrm{symbol}(\mathrm{Li}_k(z)) = -(1-z) \otimes \underbrace{z \otimes \cdots \otimes z}_{k-1 \text{ times}}. \quad (16)$$

Example: remainder function

$$R_6^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \left(L_i - \frac{1}{2} \text{Li}_4(-v_i) \right) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 \text{Li}_2(-v_i) \right)^2 + \frac{1}{24} J^4 + \frac{\pi^2}{12} J^2 + \frac{\pi^4}{72}, \quad (3.1)$$

in terms of the functions

$$L_i = \frac{1}{384} P_i^4 + \sum_{m=0}^3 \frac{(-1)^m}{(2m)!!} P_i^m (\ell_{4-m}(x_i^+) + \ell_{4-m}(x_i^-)), \quad (3.2)$$

$$P_i = 2 \text{Li}_1(-v_i) - \sum_{j=1}^3 \text{Li}_1(-v_j),$$

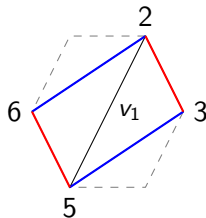
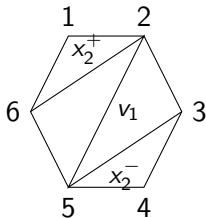
and

$$J = \sum_{i=1}^3 \ell_1(x_i^+) - \ell_1(x_i^-), \quad (3.3)$$
$$\ell_n(x) = \frac{1}{\gamma} (\text{Li}_n(-x) - (-1)^n \text{Li}_n(-1/x)).$$

Example: alphabet for the remainder function $R^{(2)}_6$

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{\langle 35 \rangle \langle 26 \rangle}{\langle 23 \rangle \langle 56 \rangle}, & v_2 &= \frac{\langle 13 \rangle \langle 46 \rangle}{\langle 16 \rangle \langle 34 \rangle}, & v_3 &= \frac{\langle 15 \rangle \langle 24 \rangle}{\langle 45 \rangle \langle 12 \rangle}, \\
 x_1^+ &= \frac{\langle 14 \rangle \langle 23 \rangle}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}, & x_2^+ &= \frac{\langle 25 \rangle \langle 16 \rangle}{\langle 56 \rangle \langle 12 \rangle}, & x_3^+ &= \frac{\langle 36 \rangle \langle 45 \rangle}{\langle 34 \rangle \langle 56 \rangle}, \\
 x_1^- &= \frac{\langle 14 \rangle \langle 56 \rangle}{\langle 45 \rangle \langle 16 \rangle}, & x_2^- &= \frac{\langle 25 \rangle \langle 34 \rangle}{\langle 23 \rangle \langle 45 \rangle}, & x_3^- &= \frac{\langle 36 \rangle \langle 12 \rangle}{\langle 16 \rangle \langle 23 \rangle}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

where $\langle ij \rangle$ denotes the Plücker coordinate Δ_{ij} . In particular, the symbol alphabet consists of cross ratios for cluster variables of $\text{Gr}_{2,6}$:



$$v_1 = \frac{\Delta_{35} \Delta_{26}}{\Delta_{23} \Delta_{56}}$$

Cluster bootstrap

In planar $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills cluster variables of the Grassmannians $\text{Gr}_{4,6}(\cong \text{Gr}_{2,6})$, $\text{Gr}_{4,7}$ are letters in the symbol alphabet.

This has lead to a *bootstrap* for the amplitude: it is the unique generalized polylogarithmic function with symbol letters given by cluster variables. Mutation relations among cluster variables determine *adjacencies* to form words.

- hexagon 2 loops [A. B. Goncharov, M. Spradlin, C. Vergu, and A. Volovich 1006.5703], 3 loops [L. Dixon, J. Drummond, J. Henn 1108.4461], [L. Dixon, J. Drummond, M. von Hippel, J. Pennington 1308.2276], 4 loops [L. Dixon, J. Drummond, C. Duhr, J. Pennington 1402.3300], 5 loops [S. Caron-Huot, L. Dixon, A. McLeod, M. von Hippel 1609.00669], 6 and 7 loops [S. Caron-Huot, L. Dixon, F. Dulat, M. von Hippel, A. McLeod, Papathanasiou 1903.10890],
- NMHV 3 loops [L. Dixon, M. von Hippel 1408.1505], 4 loops [L. Dixon, M. von Hippel, A. McLeod 1509.08127],
- unique [J. Drummond, G. Papathanasiou, M. Spradlin 1412.3763],
- heptagon [L. Dixon, J. Drummond, T. Harrington, A. McLeod, G. Papathanasiou, M. Spradlin 1612.08976], adjacencies [J. Drummond, J. Foster, Ö. Gürdoğan, G. Papathanasiou 1812.04640], [J. Drummond, J. Foster, Ö. Gürdoğan 1710.10953]

Question: Can this be extended to non-planar/non-dual conformal cases?

Beyond dual conformal scattering

Kinematics parametrized as momentum twistor variety with cluster structure induced by partial flag varieties $\mathcal{F}_{2,4;n}$ generalizing Grassmannians [B.-Drummond-Glew JHEP 2023]

- n=5 finite type, cluster algebra is not invariant under permutation of Plücker labels.
cluster variables and their permutation copies recover (all but one, W_{31} without clear physical significance) symbol letters and correctly predict adjacencies [B.-Drummond-Glew, JHEP 2023]
- n=6 infinite cluster type, all but some letters in the alphabet can be recovered from the cluster structure [Spradlin-Pokraka-Volovich-Weng, arXiv:2506.11895 [hep-th]] and [B.-Drummond-Glew-Gürdoğan-Wright, arXiv:2507.01015 [hep-th]]

Referencias

- BMN** Lara Bossinger, Fatemeh Mohammadi, Alfredo Nájera Chávez. Families of Gröbner Degenerations, Grassmannians and Universal Cluster Algebras *SIGMA* 17 (2021)
- FZ02** Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.
- FZ03** Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.* 154 (2003), no. 1, 63–121.
- FG07** Vladimir V. Fock and Alexander Goncharov. Dual Teichmüller and lamination spaces. Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 647–684, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 11, Eur. Math. Soc., Zürich, (2007)
- GHKK** Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608 (2018)
- MR88** Teo Mora and Lorenzo Robbiano. The Gröbner fan of an ideal. *Computational aspects of commutative algebra. J. Symbolic Comput.* 6 (1988), no. 2-3, 183–208
- Pen87** Robert C. Penner. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces. *Comm. Math. Phys.* Volume 113, Number 2 (1987), 299–339.
- Sco06** Joshua S. Scott. Grassmannians and cluster algebras. *Proc. London Math. Soc.* (3) 92 (2006), no. 2, 345–380.
- LS19** Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Cluster algebras and Jones polynomials. *Selecta Math. (N.S.)* 25 4 Paper No. 58, 41 (2019)
- KW14** Yuji Kodama and Lauren Williams. KP solitons and total positivity for the Grassmannian. *Invent. Math.* 198, no. 3 (2014)