§1 [Notas de Spepes]

1.1 La combinatoria del grupo simétrico

$[n] = \{1, \dots, n\}$

$[a,b] = \{a, a+1, \dots, b\}$

$\binom{[n]}{k} = \{$ k-subconjuntos de $[n]\}$

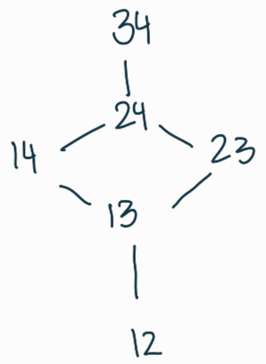
$2^{[n]} = \{$ subconjuntos de $[n]\} = \binom{[n]}{1} \cup \dots \cup \binom{[n]}{n-1} \cup \{[n]\}$

↳ definimos un orden parcial en $\binom{[n]}{k}$:

$\{i_1 < i_2 < \dots < i_k\} \preceq \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\} \iff \forall\ 1 \leq a \leq k : i_a \leq j_a$

Ejemplo: $\binom{[4]}{2} = \{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$

El diagrama de Hasse del orden $\preceq$



S_n es el grupo de permutaciones en $[n]$

$S_n \circlearrowright [n] \Rightarrow$ induce una acción en $\binom{[n]}{k}$

$w \in S_n : w[k] \in \binom{[n]}{k}$ y tenemos una cadena creciente

$$w[1] \subset w[2] \subset \dots \subset w[n-1] \subset [n]$$

$e \in S_n$ sea la identidad

$w_0 \in S_n \quad : \quad w_0(j) = n+1-j$

$(ij) \in S_n$ sea la trasposición cambiand i y j
y fijando los demás elementos $[n] \setminus \{i,j\}$

$s_i = (i\ i{+}1)$ transposiciones simples

Si $w : j \mapsto z_j \in [n]$ escribimos $w = z_1 z_2 \cdots z_n$

ej. $w = 231 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $z_1 = 2,\ z_2 = 3,\ z_3 = 1$

$= s_1 s_2$

$s_1 s_2 (1) = s_1(1) = 2$

Definimos la longitud de $w \in S_n$ es el mínimo a tal que $w = s_{i_1} \cdots s_{i_a}$, notación: $\ell(w)$

Decimos que una expresión/palabra $s_{j_1} \cdots s_{j_k}$ de w es reducida si $k = \ell(w)$.

Decimos (i,j) es una inversión de w si

$1 \leq i < j \leq n$ y $w(i) > w(j)$

$Inv(w) = \{ (i,j) \text{ inversión de } w \}$

$\# Inv(w) = \ell(w)$

En S_n definimos el orden de Bruhat (un orden parcial) [Björner-Brenti: Combinatorics of Coxeter groups]

Teorema/Definición Sean $u, v \in S_n$, equivalentes son

* (1) $\forall\ 0 < i, j < n$: $\#([i] \cap u[j]) \geq \#([i] \cap v[j])$

(2) $\forall\ 0 < i < n$: $u[i] \preceq v[i]$ eg $u = 123 \preceq v = 132$ $i = j = 2$

(3) Existe una palabra reducida $s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_\ell}$ para v y una subpalabra $s_{j_{a_1}} s_{j_{a_2}} \cdots s_{j_{a_m}}$ que es una palabra para u

(4) Para cada palabra reducida $s_{j_1} \cdots s_{j_\ell}$ de v existe una subpalabra $s_{j_{a_1}} \cdots s_{j_{a_m}}$ cuyo producto es u

Si se cumple cualquiera de las condiciones equivalentes escribimos $\boxed{u \preceq v}$

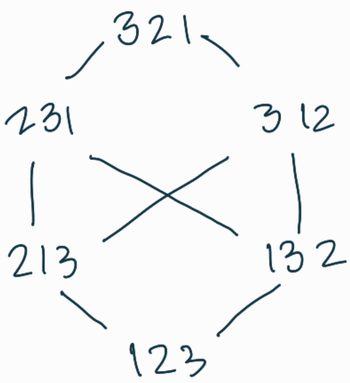
Tarea: el orden Bruhat inducido en $S_n / \{ s_i : i \neq k \}$

coincide con el orden $\leq$ en $\binom{[n]}{k}$

$*$ (1) es equivalente a

$$\#([i+1,n] \cap u[j]) \leq \#([i+1,n] \cap v[j])$$
$$\#([i] \cap u[j+1,n]) \leq \#([i] \cap v[j+1,n])$$
$$\#([i+1,n] \cap u[j+1,n]) \geq \#([i+1,n] \cap v[j+1,n])$$

Ejemplo: El diagrama de Hasse del orden de Bruhat para $S_3 = \{\underset{e}{\underline{\underline{123}}}, 132, 213, 231, 312, \underset{w_0}{\underline{\underline{321}}}\}$



$i=j=2$
$u : 1$
$v : 2$

$1 < i,j < 3$

$$\#([i] \cap u[j]) \geq \#([i] \cap v[j])$$
$$\Updownarrow$$
$$u \leq v$$

$213 = u$

$$\#(\underset{\{1\}}{[1]} \cap \underset{\{2\}}{u[1]}) = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \geq \quad \begin{array}{c|ccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$312 = v$

sage

Definición: El producto de Demazure es una multiplicación asociativa $* : S_n \times S_n \to S_n$

$$s_i * w = \begin{cases} s_i w & \ell(s_i w) = \ell(w)+1 \\ w & \ell(s_i w) = \ell(w)-1 \end{cases}$$

$$w * s_i = \begin{cases} ws_i & \ell(ws_i) = \ell(w)+1 \\ w & \ell(ws_i) = \ell(w)-1 \end{cases}$$

Ejemplo:

$s_1 * s_1 = s_1$

$s_1 s_2 s_1 * s_1 = s_1 s_2 s_1$

$s_1 s_2 * s_3 = s_1 s_2 s_3$

$s_1 s_3 s_4 * s_1 = s_1 s_3 s_4$

$s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$

$s_1 s_3 s_4 s_1 = s_3 s_4$

$3 = \ell(\underbrace{s_1 s_3 s_4}_{w}) - 1 = \ell(\underbrace{s_3 s_4}_{ws_i})$

Una partición es una sequencia finita de enteros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$

Escribimos $|\lambda| = \sum \lambda_i$

Decimos k es la longitud de λ

equiv., k es el número de filas de λ

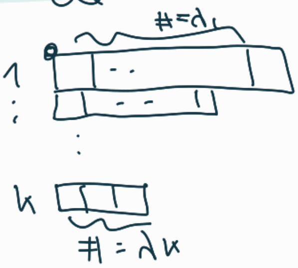
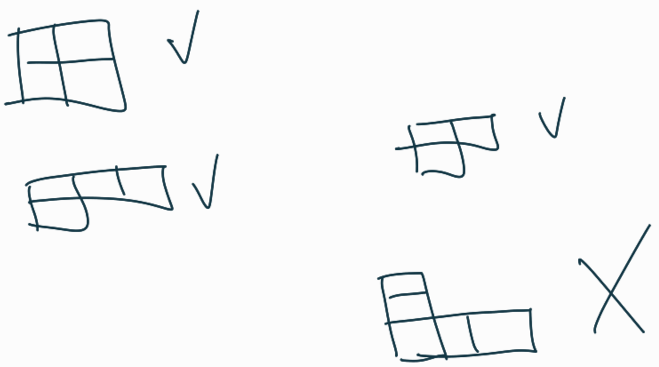
$\lambda \longmapsto$ 

diagrama de Young de λ



Podemos extender una partición con zeros al final tal que una partición con a lo máximo n filas $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \underline{\lambda_n} \geq 0$

$w_k = (1, 1, \dots, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)$ k-veces 1 y $(n-k)$-veces 0

Considerando el conjunto de particiones con a lo maximo n filas tenemos una operacion de adición:

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_n) = (\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \dots, \lambda_n+\mu_n)$$

$\rightsquigarrow$ estructura de un semigrupo abeliano libremente generado por $w_1, \dots, w_n$

Grupos algebraicos y geometria algebraica

K campo

$\mathbb{A}^1$ linea afin

$\mathbb{A}^n$ espacio afin de dim n

$\mathbb{G}_m = K^* =$ unidades en K

$\mathbb{G}_m^n = \mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m$

$\mathbb{P}^{n-1} =$ espacio de lineas en $\mathbb{A}^n$

$=$ espacio proyectivo de dim $n-1$

$\mathbb{P}(V) =$ espacio de lineas en V

V esp. vect.

$GL_n =$ $n \times n$ matrices invertibles

$\mathbb{G}_m^n \cong \underset{\text{toro}}{\overset{\cup}{T}} =$ matrices diagonales

Borel $- B_+ =$ subgrupo de matrices triangular superior en GL_n

$B_- =$ —— " —— inferior —"—

$B_+ \supset N_+ =$ subgrupo con elementos en el diagonal $= 1$

$B_- \supset N_- =$ —— " ——

$N_\pm \triangleleft B_\pm$ subgrupos normales

$B_\pm = T N_\pm = N_\pm T$

⚠ $B_+ = B$

Podemos encajar $S_n \hookrightarrow GL_n$

$w \mapsto (m_{ij})_{ij}$ $\quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & i = w(j) \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$

Ejemplo $\quad w = 2314 \longmapsto \begin{array}{c|cccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}$

$\quad \wedge$
$S_4 \hookrightarrow GL_n$

⚠ $m_{ij} = \begin{cases} 1 & j = w(i) \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$

sea V esp. vectorial

La Grassmanniana $G(k,V) = \{k\text{-subespacios de } V\}$

escogiendo una base $v_1, \ldots, v_n$ de $V \Rightarrow V \cong K^n = \mathbb{A}^n$

$\Rightarrow G(k,V) = G(k,n) = \{k\text{-planos en } \mathbb{A}^n\}$

$$G(k,V) \hookrightarrow \overbrace{\mathbb{P}(\Lambda^k V)}$$ encaje de Plücker

$$\langle v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \rangle \longmapsto [v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}]$$

sea $e_1, \ldots, e_n$ la base estandar de $\mathbb{A}^n$

$\Lambda^k \mathbb{A}^n$ tiene una base $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots e_{i_k} :$

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$

$\rightsquigarrow$ la base está indexada por $\binom{[n]}{k}$

coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}(V)$ son dadas por la base dual de $\{v_1, \ldots, v_n\}$

para $\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{A}^n)$ $\binom{[n]}{k}$ es conjunto que indexa las coordenadas homogénoas : es decir

$I = 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n \rightsquigarrow V \in G(k,n)$ con base $\boxed{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}}$

$\Uparrow$

$\binom{[n]}{k}$ entonces la coord. correspondiente a I de la imagen de $V = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \in \Lambda^k A^n$

$$= \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} \lambda_{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}}$$

$$\Delta_I(V) = \Delta_{i_1, \dots, i_k}(V) = \lambda_I$$

$V \rightsquigarrow$ base $u_1, \dots, u_k \rightsquigarrow M_V$ matriz $k \times n$

expresar en la base canonica $e_1, \dots, e_n$

$$\Delta_I(V) = \det\Big(\underbrace{M_V|_{[k], I}} \Big)$$

submatiz de M_V con columnas indexadas por I

Ejemplo: $M_V = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$, $\Delta_{13}(M_V) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$