

$I = \{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\} \mapsto V \in G(k, n)$ con base $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$
 $\uparrow$
 $\binom{n}{k}$ entonces la coord. correspondiente a I de la imagen de $V = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \in \wedge^k \mathbb{A}^n$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \lambda_{j_1 \dots j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$$

$$\Delta_I(V) = \Delta_{i_1, \dots, i_k}(V) = \lambda_I$$

$V \mapsto$ base $u_1, \dots, u_k$ $\mapsto M_V$ matriz $k \times n$
 expresas en la base canonica $e_1, \dots, e_n$

$$\Delta_I(V) = \det(M_V|_{[n], I})$$

submatriz de M_V con columnas indexadas por I

Ejemplo: $M_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Delta_{13}(M_V) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Variedades de banderas

20/8/2025

- la bandera completa $Fl(V)$, V esp. vect.

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} Gr(k, V)$$

consiste de $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V$ $\dim V_i = i$

$$Fl_n := Fl(\mathbb{A}^n)$$

- las variedades de banderas parciales con notación para $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n-1$

$Fl(k_1, \dots, k_p; V) \subset \prod_{i=1}^p Gr(k_i, V)$
 consiste de banderas parciales

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_p \quad \dim V_i = k_i$$

para cada $I \subset [n] \quad 0 < |I| \leq n$

tenemos la coord. de Plücker Δ_I

$\leadsto$ tenemos el empaquetamiento de Plücker para las variedades de bandera

Tenemos una acción de GL_n en $Gr(k, n)$

y $Fl_n \rightarrow$ es transitiva

$\Rightarrow Fl_n$ es un cociente de GL_n
 por un grupo isotropo

Convención: escogiendo una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de A^n
 la bandera estándar es

$$\begin{array}{ccccccc} \langle e_1 \rangle & \subset & \langle e_1, e_2 \rangle & \subset & \dots & \subset & \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ V_1 & & V_2 & & & & V_{n-1} \end{array}$$

$\Rightarrow B_+$ es estabilizador de la band. est.

$$\Rightarrow Fl_n = GL_n / B_+$$

$\Rightarrow$ banderas son de forma $g B_+$

$g B_+$ corresponde a la bandera $V_1 \subset \dots \subset V_{n-1}$
 con V_k generado por los k primeros
 columnas de g de lado izquierdo

Una coordenada de Plücker Δ_I es el menor de g con filas en I y columnas $[k]$

§1.4 Descomposición de Bruhat

Teorema/Def. Las matrices de permutaciones $w \in S_n$ son un conjunto de representantes de las clases doble de:

$$B_{\pm} \backslash GL_n / B_{\pm}$$

Es decir, $GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} B_{\pm} w B_{\pm}$

se llama la ^{$B_{\pm} w B_{\pm}$} descomposición de Bruhat

Prop: Sea $g \in GL_n$. $g \in B_{-} w B_{+}$

$\Leftrightarrow \forall 0 < i, j < n$ la submatriz $i \times j$ (desde la esquina superior-izquierda) de g tiene rango $\#([i] \cap w[j])$

Similar, $g \in \overline{B_{-} w B_{+}} \Leftrightarrow \forall 0 < i, j < n$ la submatriz $i \times j$ (de la esq. sup-izq.) de g tiene rango $\leq \#([i] \cap w[j])$

Definimos la matriz de rango de w es

$$r(w)_{ij} = \#([i] \cap w[j])$$

por convención $r_{0j} = r_{i0} = 0$

observa: $\overline{r_{nn} = r_{nn} = k}$

Ejemplos

$$w = s_1 s_2 s_3 = 2341 \in S_4$$

$$r(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in B_w B_+$$

rango 1
 $\Rightarrow$ menor $2 \times 2 = 0$

$$x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \in k[x_{ij} : 1 \leq i, j \leq 4]$$

$$g' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\in \overline{B_w B_+}$$

Teorema El ideal de $\overline{B_w B_+}$ en $\text{Mat}_{n \times n} = A^{n^2}$ (espacio afín) es generado por los menores

$$(\#([i] \cap w[j]) + 1) \times (\#([i] \cap w[j]) + 1)$$

contenidos en la esq. izq. sup. de la submatz $i \times j$.

en el anillo $k[x_{ab} : 1 \leq a, b \leq n]$

Prop:

$$\overline{B_{\pm} \vee B_{\pm}} = \bigcup_{u \leq v} B_{\pm} \cup B_{\pm}$$

el mismo signo

$$\overline{B_{\pm} \vee B_{\mp}} = \bigcup_{u \geq v} B_{\pm} \cup B_{\mp}$$

signo diferente

$$\text{Adem\u00e1s, } \dim B_{\pm} \vee B_{\pm} = \binom{n+1}{2} + l(v)$$

$$\dim B_{\pm} \vee B_{\mp} = n^2 - l(v)$$

Definici\u00f3n en $Fl_n = GL_n/B_{+}$ definimos

$$\text{las c\u00e9lulas de Schubert } \overset{\circ}{X}^w = (B_{+}wB_{+})/B_{+}$$

$$\text{y } \overset{\circ}{X}_w = (B_{-}wB_{+})/B_{+}$$

y las variedades de Schubert

$$X^w = \overline{B_{+}wB_{+}}/B_{+}$$

$$X_w = \overline{B_{-}wB_{+}}/B_{+}$$

Prop: La c\u00e9lula de Schubert $\overset{\circ}{X}^w$ es un espacio af\u00edn de dimensi\u00f3n $l(w) = \binom{n}{2} - l(w)$ con elementos son de forma $(w+X)B_{+}$ con

w la matriz de la permutaci\u00f3n

y X es una matriz con entradas

no cero en las posiciones $(w(j), i)$

con $1 \leq i < j \leq n$ y $w(j) < w(i)$
 $w(i) < w(j)$

Ejemplo: Fl_3 tiene $3!$ variedades de Schubert

e $\downarrow \uparrow$ 213 $w=132$ 312 $w=231$ 321

$$\begin{array}{cccccc} (w(i), i) \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ * & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & & & (w(2), 2) & & i=2 & (w(i), i) = (3, 2) \\ & & & & & j=2 \times j \neq i \\ & & & & & j=3 & w(j) = 1 < w(i) = 2 \checkmark \end{array}$$

Prop: X_w es la cerradura $\overset{\circ}{X}_w$

$$\underset{X_w}{X^w} = \bigsqcup_{\substack{v \leq w \\ v \neq w}} \overset{\circ}{X}_v$$

Notación: $v B_+ \in X^w \Leftrightarrow v$ es abajo de w
 $v B_+ \in X_u \Leftrightarrow v$ es encima de u

Def:

Variedades de Schubert en $Gr(k, n)$ son indexadas por $\{I \in \binom{[n]}{k}\}$

$$X_I := \{v \in Gr(k, n) : \Delta_I(v) = 0\}$$

$\cup \overset{\circ}{X}_I$ donde $\Delta_I(v) \neq 0$

$X_u \subset Fl_n$ consiste de banderas

$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{n-1}$ con $F_k \in X_{u[k]}$

§1.5 Variedades de Richardson

Sean $u \leq w$ en S_n definimos

la variedad de Richardson abierta

$$\overset{\circ}{R}_u^w = \overset{\circ}{X}_u \cap \overset{\circ}{X}^w$$

la variedad de Richardson cerrado $R_u^w = X_u \cap X^w$

Ejemplo: FL_3 es de dim 3

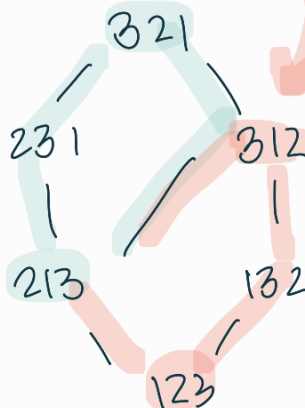
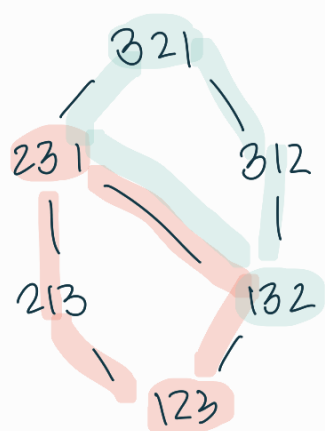
$$R_{123}^{231}$$

$$R_{132}^{321}$$

$$R_{123}^{312}$$

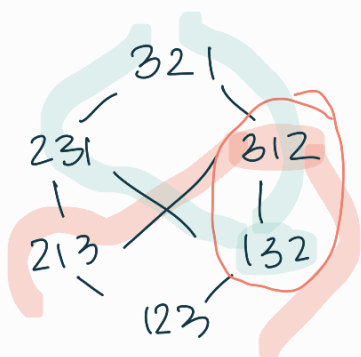
$$R_{213}^{321}$$

son de dim 2



$$R_{132}^{312}$$

$$X^{312} \wedge X_{132}$$



$$X_u = \bigsqcup_{v \geq u} X_v^0$$

$$X^w = \bigsqcup_{v \leq w} X_v^0$$

$$X^{312} = X^{0312} \sqcup X^{0132} \sqcup X^{0213} \sqcup X^{0123}$$

Observaciones para $u \leq w$

$$\bullet \quad \text{NB}_+ \in R_u^w \Leftrightarrow u \leq v \leq w$$

$$\bullet \quad R_u^w = \bigsqcup_{u \leq u' \leq w' \leq w} R_{u'}^{w'}$$

$$\bullet \quad \dim R_u^w = l(w) - l(u)$$

$\bullet \quad R_u^w$ es suave, irreducible afines

$\bullet \quad R_u^w$ es irreducible, proyectivo y contiene R_u^w como un subconjunto denso

- R_u^w es normal, Cohen-Macaulay con singularidades racionales

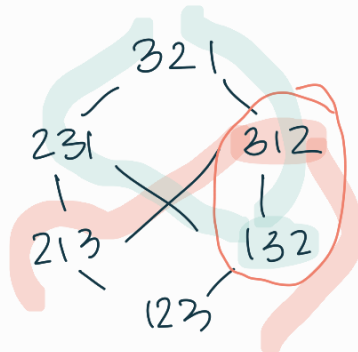
En variedades de banderas parciales
 definimos variedades de Richardson proyectivas
 a través para $u \leq w$ $\Pi_u^w := \Pi(R_u^w)$

$$\Pi : \text{Fl}_n \longrightarrow \text{Fl}_n(k_1, \dots, k_p)$$

en el caso de Grassmanniana $G(k, n) = \text{Fl}_n(k)$
 se llaman variedades positroides

Ejemplo:

$$\text{Fl}_3 \supset R_{132}^{312}$$



$$\Pi_{132}^{312} \subset \text{Fl}_3(1)$$

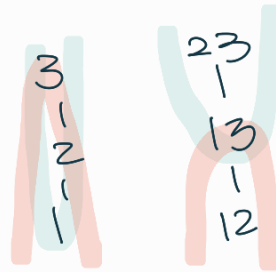
$$\text{Gr}(1, 3)$$

$$(F_1 \subset F_2) \in \text{Fl}_3$$

$$X_{132} : F_i \in X_i \quad F_2 \in X_{13} \quad \Delta_j = 0 \quad \forall j \neq 1$$

$$X^{312} : F_1 \in X^3 \quad F_2 \in X^{13}$$

$$X^w : F_i \in X^{w[i]}$$



$$R_{132}^{312}$$

$$\Delta_{23} = \Delta_{12} = 0$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} \boxed{x} & \boxed{x} & \lambda \\ x & x & x \\ \boxed{x} & \boxed{x} & \lambda \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \langle e_1, e_3 \rangle$$