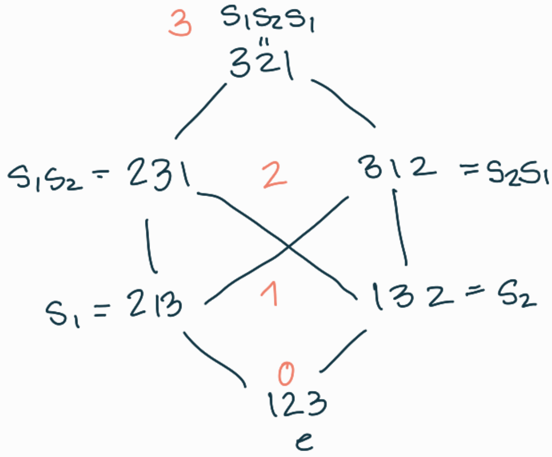
en $n=3$ dim 3 $\mathcal{F}l_3$ R^w_v $w \succeq v$

$\quad /\!/$ hay 19 variedades de Richardson

GL_n/B_+

$\quad /\!/$ dim $R^w_v = \ell(w) - \ell(v)$

$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



dim 3 : R^{321}_{123}

19   dim 2 : R^{321}_{213}, R^{321}_{132}, R^{231}_{123}, R^{312}_{123}

dim 1 : corresponden a aristas

dim 0 : corresponden a vértices

en $\mathcal{F}l_3(1) = G(1,3) = \mathbb{P}^2_{\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3}$ dim 2 $\pi : \mathcal{F}l_3 \to G(1,3)$

hay 7 variedades positroides (o Richardson proyectada) $\pi(R^w_v) = \Pi^w_v$

dim 2 : Π^{312}_{123}, Π^{321}_{132}, Π^{321}_{123}

dim 1 : $\{\Delta_1 = 0\}$ Π^{312}_{213}, Π^{321}_{231}, Π^{321}_{213}

7    $\{\Delta_2 = 0\}$ Π^{312}_{132}

$\{\Delta_3 = 0\}$ dim 2 Π^{231}_{123}, Π^{231}_{132}, Π^{213}_{123}

dim 0 : $\{\Delta_1 = \Delta_2 = 0\}$ Π^{321}_{321}, Π^{312}_{312}, Π^{321}_{312}

$\{\Delta_1 = \Delta_3 = 0\}$ Π^{231}_{231}, Π^{213}_{213}, Π^{231}_{213}

$\{\Delta_2 = \Delta_3 = 0\}$ Π^{123}_{123}, Π^{132}_{132}, Π^{132}_{123}

$*$ $R^w_e = X^w$ y $R^{w_0}_w = X_w$

$\mathring{X}^{w_0} = \begin{pmatrix} x & x & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B_+$

• Π^{312}_{123} : $R^{312}_{123} = X^{312}$: $\mathring{X}^{312} = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B_+$

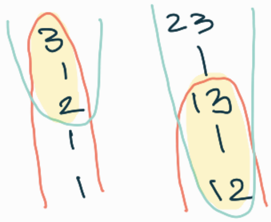
$\dim\left(\pi(\mathring{X}^{312})\right) = 2$

• Π^{312}_{213} : $R^{312}_{213} = X^{312} \cap X_{213} \ni F = (F_1, F_2)$

$\Delta_J(F_1) = 0 \quad \forall\ J \not\leq 3 = w[1]$ y $J \not\leq 2$

$\Delta_J(F_2) = 0 \quad \forall\ J \not\leq 13 = w[2],\ J \not\geq 12$

$\Delta_1 = 0$

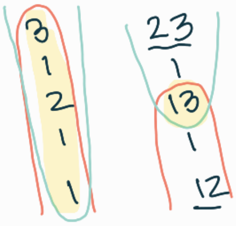


$\Delta_{23} = 0$

e.g. $F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{312}_{213}$

$\dim(\Pi(F_{ab})) = 1$

- Π^{312}_{132}



$\Delta_{23} = \Delta_{12} = 0$

$F : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

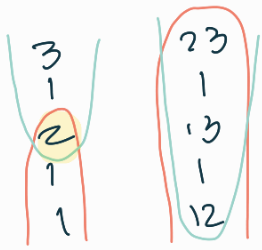
$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

$F = (F_1, F_2)$ $\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow b_1 = b_2 = 0$

$F_2 = \langle e_1, e_3 \rangle$

$F_1 = \langle \lambda e_1 + \mu e_3 \rangle \quad \Rightarrow \quad \Delta_2(F_1) = 0$

- Π^{231}_{213}



$\Delta_1 = \Delta_3 = 0$

$Fl_n(k_1, \dots, k_p)$

definimos $W_p = \underbrace{S_{k_1}}_{s_1,\dots,s_{k_1-1}} \times \underbrace{S_{k_2-k_1}}_{s_{k_1+1},\dots,s_{k_2-k_1-1}} \times \dots \times S_{n-k_p} \subset S_n$

generado por $s_i : i \notin \{k_1, \dots, k_p\}$

definimos la relación cubriente $v, u \in S$

$v \gtrdot u$ si $v > u$ y $\ell(v) = \ell(u) + 1$

v cubre u

y $v \gtrdot_p u$ si $v \gtrdot u$ y $vW_p \neq uW_p$

v P-cubre u

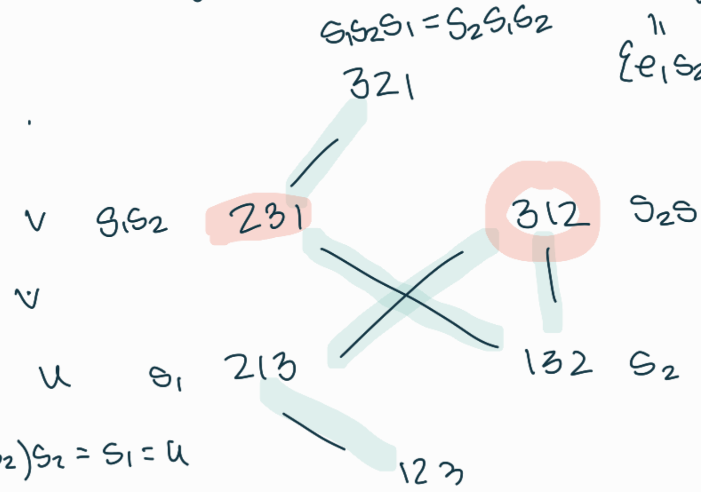
$v \geq_p u$ induce un orden parcial en S_n, denotado por $\succeq_p$ y se llama el P-orden de Bruhat

Prop: $\pi : R_u^w \longrightarrow \Pi_u^w$ es biracional* $\iff u \preceq_p w$

* se puede expresar de funciones racionales en las coordenadas y tiene un inverso con la misma propiedad

Ejemplo: $Fl_3(1) = \mathbb{P}^2$ $\qquad W_P = \langle s_2 \rangle \subset S_3$, $W_P = \{e, s_2\}$

$\preceq_P$



$v >_p u$ si $\to$ $vW_P \neq uW_P$ $\quad v > u$ ✓

$v \notin uW_P$

$vs_2 = (s_1s_2)s_2 = s_1 = u$

$vW_P = \{v, vs_2\} = \{s_1s_2, s_1\}$

$uW_P = \{u, us_2\} = \{s_1, s_1s_2\}$

Prop. aplicada a algunos ejemplos:

$\dim(\Pi_{213}^{312}) = \dim(R_{213}^{312}) = 1$, $312 >_p 213$

Π_{132}^{312} : $312 >_p 132 \Rightarrow \dim = \dim(R_{213}^{312}) = 1$

Π_{123}^{231} $\quad 231 \not>_p 123$ sabemos $\dim R_{123}^{231} = 2$

y $\pi : R_{123}^{231} \to \Pi_{123}^{231}$ no es biracional

Prop Para cada Richardson proyectada Π_u^w podemos encontrar (u', w') tal que $\Pi_u^w = \Pi_{u'}^{w'}$

y $\quad u \leq u' \preceq_p w' \leq w$

Grassmanniana $\quad W_P = S_k \times S_{n-k} \subset S_n$

$Fl_n(k)$

S_n/W_P definimos W^P el conjunto de $w \in S_n$ que es minimal en su clase wW_P

en $G(k,n)$ W^P son las permutaciones con un unico descenso en la posición k

es decir $w(k) > w(k+1)$

y $w(i) < w(i+1)$ $\forall i \neq k$

e.g. $[\underbrace{n-k+1, n-k+2, \dots, n}_{k}, 1, 2, \dots, k]$

Ej: $G(1,3)$ $\quad W^P = \{123, 213, 312\}$ $\quad$ dos descensos

123 ✓, ~~132~~, 213 ✓, ~~231~~, 312 ✓, ~~321~~

231

Prop Si $w \in W^P$ entonces $u \leq w \iff u \leq_P w$

Cada Richardson proyectada puede ser representada de exactamente una manera como $\Pi(R_u^w)$ con $w \in W^P$ y $u \leq w$.

Si $\Pi = \pi(R_u^w)$ con $w \in W^P$ y $u \leq w$ entonces los otros representantes de Π que son biracionales son de forma $\pi(R_{ux}^{wx})$ con $x \in W_P$ y $\ell(ux) = \ell(u) + \ell(x)$

$G(1,3) = \mathbb{P}^2$ $\quad$ $W^P = \{123, 213, 312\}$

$\boxed{W_P = \{e, s_2\}}$

dim 2: $\quad \underset{\text{dim}2}{\Pi_{123}^{312}} \cong \underset{\text{dim}2}{\Pi_{132}^{321}} \cong \underset{\text{dim}3}{\Pi_{123}^{321}} \cong \mathbb{P}^2$

la prop escogo este representante

$321 = s_2 s_1 s_2 = (s_2 s_1) s_2 = (312) s_2$

$132 = s_2 = (123) s_2$

En particular, la prop. nos dice:

$$R_{123}^{312} \overset{\sim}{\dashrightarrow} \Pi_{123}^{312} \cong \Pi_{132}^{321} \overset{\sim}{\dashleftarrow} R_{132}^{321}$$

Definimos la variedad de Richardson proyectada abierta $\mathring{\Pi}_u^w$ como la subvariedad abierta de Π_u^w obtenida de remover todas las propias sub-variedades de Richardson proyectadas

Prop: Si $u \leq_P w$ entonces $\pi : R_u^w \dashrightarrow \Pi_u^w$ es biracional

$\Rightarrow \pi : \mathring{R}_u^w \to \mathring{\Pi}_u^w$ es un isomorfismo.