§2 El álgebra de Plücker y anillos de coordenadas homogéneos de las variedades Richardson

$$\begin{array}{ccccc} Fl_n & \hookrightarrow & \prod_{k=1}^{n-1} Gr(k,V) & \overset{\text{Plücker}}{\hookrightarrow} & \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ \uparrow & & & & \\ X_v^u & & & & \end{array}$$

Tres definiciones equivalentes del álgebra de Plücker Pluck

(1) funciones en GL_n $\supset$ coordenadas de Plücker

$\Delta_I(g)$, $\Delta_\emptyset(g) = 1$, $\underbrace{\Delta_{[n]}(g)}{} = \det g$

Pluck := K-álgebra generada por las coord. de Plücker

Pluck es $\mathbb{Z}^n$-graduado a partir: $|I| = k$

$$\deg(\Delta_I) := (\underbrace{1,\dots,1}_{k}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-k}) = \omega_k$$

(2) $Fl_n \twoheadrightarrow G(k,n) \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$

$$\mathcal{L}(\omega_k) \xleftarrow{\text{pull back}} \mathcal{O}(1)$$

$\rightsquigarrow$ obtenemos los haces lineales $\mathcal{L}(\omega_1), \dots, \mathcal{L}(\omega_{n-1})$

fijando $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ definimos

$$\mathcal{L}(\lambda) = \bigotimes_{k=1}^{n-1} \mathcal{L}(\omega_k)^{\lambda_k - \lambda_{k+1}}$$

si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \Rightarrow H^0(Fl_n, \mathcal{L}(\lambda))$ es la parte de peso λ en Pluck

* tomando clases de isomorfismo de haces lineales podemos restringirnos a su peso $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$ $\rightsquigarrow$ SLPluck

tenemos: $\mathcal{L}(\omega_1), \dots, \mathcal{L}(\omega_{n-1})$ son una base de grupo de Picard de $\mathcal{F}l_n$

$$\mathrm{SLPluck} := \bigoplus_{\lambda=(\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}, 0)} H^0(\mathcal{F}l_n, \mathcal{L}(\lambda))$$ es el anillo de Cox de $\mathcal{F}l_n$

(3) definimos S_n el haz tautologico, de rango n en $\mathcal{F}l_n$ trivial

$$0 = S_0 \subsetneq S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{n-1} \subset S_n$$

$$\mathcal{L}(\omega_k) = (\Lambda^k S_k)^{-1}, \quad \mathrm{Pluck} = \bigoplus_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} H^0(\mathcal{F}l_n, \mathcal{L}(\lambda))$$

Notación: R_u^w escribimos Pluck_u^w para su anillo de coordenadas homogéneas

$$\mathrm{Pluck}_u^{w_0} = \mathrm{Pluck}\, u, \quad \mathrm{Pluck}_e^w = \mathrm{Pluck}^w$$

corresp. a las X_u var. de Schubert X^w

Pluck_u^w = anillo generado por Δ_I modulo sus relaciones que se cumplen en R_u^w

$$\rightsquigarrow \quad k[\Delta_I] \longrightarrow \mathrm{Pluck}_u^w$$

el kernel es (por def.) el ideal de R_u^w (analogo a (1))

analogos a (2) y (3) : $$\mathrm{Pluck}_u^w = \bigoplus_{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n} H^0(R_u^w, \mathcal{L}(\lambda))$$

Teorema (Brion-Lakshmibai)
$\forall$ $u \leq w$ y λ partición tenemos

$$H^0(\mathcal{F}l_n, \mathcal{L}(\lambda)) \longrightarrow H^0(R_u^w, \mathcal{L}(\lambda))$$ es sobre.

§7.1 Teoría clásica del álgebra de Plücker

<u>Obj</u>: Plück es un cociente de $k[\Delta_I]$ módulo el ideal de relaciones de Plücker
$\downarrow$
relaciones cuadráticas

$1 \leq r \leq a \leq b \leq n$ y fijamos

$i_1, i_2, \dots, i_{a-r}, j_1, j_2, \dots, j_{r-1}, \overbrace{m_1, m_2, \dots, m_{b+1}}$ en $[n]$

definimos la relación de Plücker asociada

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \cap \\ S_{b+1}/\underset{\sim}{S_r \times S_{b+1-r}}}} (-1)^{l(\sigma)} \Delta_{\underbrace{\overbrace{i_1, \dots, i_{a-r}, m_{\sigma(1)} m_{\sigma(2)} \cdots m_{\sigma(r)}}}_{\text{card. } a}} \Delta_{\underbrace{\overbrace{j_1 \cdots j_{r-1} m_{\sigma(r+1)} \cdots m_{\sigma(b+1)}}}_{\text{card. } b}} = 0$$

Teorema: El álgebra de Plücker es el cociente de $k[\Delta_I]$ mod. el ideal generado por las relaciones de Plücker. ← ideal de Plücker

* también son una base de Gröbner para ciertos órdenes

Bases de Gröbner

$k[x_1, \dots, x_M]$ anillo de polinomios con base de monomios

definimos un orden de términos como un orden total $\leq$ en el conjunto de monomios t.q.

(1) $x^a \preceq x^b \Rightarrow x^{a+c} \preceq x^{b+c}$

$\forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}^M_{\geq 0}$

(2) no existen cadenas descendentes infinitas

Si $g \in k[x_1,\dots,x_M]$ y $\preceq$ un orden de terminos definimos su termino inicial como el termino maximal bajo $\preceq$, $in_{\preceq}(g)$

si $I \subset k[x_1,\dots,x_M]$ ideal definimos su ideal inicial $in_{\preceq}(I) = \langle in_{\preceq}(g) : g \in I \rangle$

Una base de Gröbner de I resp. $\preceq$ es un conjunto generador de I, $\{g_1,\dots,g_r\}$ t.q. $\langle in_{\preceq}(g_1),\dots, in_{\preceq}(g_r)\rangle = in_{\preceq}(I)$

$in_{\preceq}(I)$ es siempre un ideal monomial

$\Rightarrow$ $\mathrm{Spec}\left(k[x_1,\dots,x_M] / in_{\preceq}(I)\right)$ es una unión de hiperplanos de coordenadas

$x_1x_2 \in in_{\preceq}(I) \Rightarrow \{x_1=0\}\cup\{x_2=0\} \subset \mathrm{Spec}\left(k[x]/in_{\preceq}I\right)$

$\hookrightarrow$ $\{1,2\}$ no es cara de Δ

Si $in_{\preceq}(I)$ es reducido i.e. su conjunto generador es "libre de cuadrados" (los exponentes de generadores son 0 o 1)

$\hookrightarrow$ ideales de Stanley-Reisner

tienen $\mathrm{Spec}\left(k[x_1,\dots,x_M]/in_{\preceq}(I)\right)$ reducido y podemos asociar un complejo simplicial Δ en $[M]$ donde $F \subset [M]$ es una cara de Δ $\iff$ $\underset{f \in F}{\mathrm{Span}}(e_f) \subset \mathrm{Spec}(k[x_1,\dots,x_M]/in_\leq I)$

algebraicamente:

generadores minimales de $in_\leq(I)$ $\longleftrightarrow$ no-caras minimales de Δ

$k[x_1,\dots,x_M]/in_\leq(I)$ tiene base de monomios $x^a \notin in_\leq(I)$

$\Updownarrow$

$k[x_1,\dots,x_M]/I$ tiene base de monomios estándar $x^a \notin in_\leq(I)$

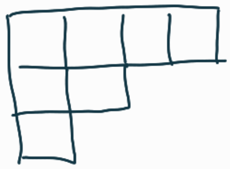
Teorema: Pluck_u es un cociente de $k[\Delta_I]$ presentado por el ideal generado de relaciones de Plücker y relaciones lineales $\Delta_I = 0$ $\forall$ $I \not\geq u([1,\dots,|I|])$. Además son una base de Gröbner (resp. a ciertos órdenes) y el ideal es saturado y homogéneo.

Pluck^w ... $I \not\leq w([1,\dots,|I|])$

Diagramas de Young son arreglos de cajas determinados por una partición λ:

λ_i indica el número de cajas en la fila i

Ej: $(4,2,1)$



$\lambda_1 = 4$
$\geq$
$\lambda_2 = 2$
$\geq$
$\lambda_3 = 1$

Un tableau de Young de forma λ es un relleno con enteros positivos.

Un tableau de Young se llama semi-estándar si el relleno cumple:

- los enteros $a_1, \dots, a_{\lambda_k}$ de la k-ésima fila cumplen $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{\lambda_k}$ $\forall k$
- los enteros $b_1, \dots, b_r$ de la r-ésima columna cumplen $b_1 < b_2 < \dots < b_r$ $\forall r$.

Notación: SSYT = semi standard Young table.

Un tableau de Young semi estándar reverso cumple

- los enteros $a_1, \dots, a_{\lambda_k}$ de la k-ésima fila cumplen $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{\lambda_k}$ $\forall k$
- los enteros $b_1, \dots, b_r$ de la r-ésima columna cumplen $b_1 > b_2 > \dots > b_r$ $\forall r$.

Sea T un tableau de Young con $I_1, \dots, I_k$ los conjuntos de indices de sus columnas definimos el monomio de Plücker

$$\Delta(T) = \prod_{i=1}^{k} \Delta_{I_i} \in \mathrm{Pluck}$$

Observar: $\Delta(T)$ es un monomio de Plücker en Pluck de Fl_n si $\lambda = (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n)$ y el relleno es con $[n]$

Ejemplo: $(4,2,1)$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \text{SSYT} \rightsquigarrow \text{contenido es } (2,2,2,1)$$

$$\Delta(T) = \Delta_{124}\,\Delta_{13}\,\Delta_2\,\Delta_3$$

T un SSYT definimos su contenido $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donde α_j es el número de j's en T.

Algebraicamente tenemos: $\Delta(T)$ tiene peso λ resp. a la acción de derecha $T \subset GL_n$ en GL_n y tiene peso α resp. a la acción de izquierda de $T \subset GL_n$ en GL_n.

Teorema: El conjunto de todos monomios de Plücker $\Delta(T)$ con T SSYT con entradas en $[n]$ forma una base para el álgebra de Plücker

Ejemplo: $n=3$ $\mathcal{F}l_3$

tableaux de forma $(2,1,0)$ $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array}$

y contenido $(1,1,1)$ $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$ $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$

relación de Plücker base $\{\Delta_{13}\Delta_2, \Delta_{12}\Delta_3\}$

$$\Delta_{12}\Delta_3 - \Delta_{13}\Delta_2 + \Delta_{23}\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_{23}\Delta_1 = \Delta_{13}\Delta_2 - \Delta_{12}\Delta_3 \quad \checkmark$$