

El ideal de las variedades Richardson

E la bandera estándar : $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \dots \subset \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$
 E^{op} $\langle e_n \rangle \subset \langle e_n, e_{n-1} \rangle \subset \dots \subset \langle e_n, \dots, e_2 \rangle$

Lema / Def: $w \in S_n$, $F \in \mathcal{F}_n$ Decimos

$$E \xrightarrow{w} F \Leftrightarrow \dim(E_i \cap F_j) = \#([i] \cap w[j])$$

$$\forall 1 \leq i, j \leq n$$

$$R_u^w = \{ F \in \mathcal{F}_n : E \xrightarrow{u} F \xleftarrow{w \circ u} E^{op} \}$$

Ej: $R_{\begin{smallmatrix} 4231 \\ 1324 \end{smallmatrix}}^{u=4} \quad \begin{smallmatrix} 4231 & \xrightarrow{s_2} & w_0 \\ 1324 & \xrightarrow{s_2} & e \end{smallmatrix}$

en $X^{4231} \quad \Delta_{34} = 0 \quad \vee \quad X_{1324} \quad \Delta_{12} = 0$

$$w[1] = w_0[1], \quad w[2] = \{2, 4\}, \quad w[3] = w_0[3]$$

$$u[1] = [1], \quad u[2] = \{1, 3\}, \quad u[3] = [3]$$

$$R_{\begin{smallmatrix} 4231 \\ 1324 \end{smallmatrix}}^{u=4} = \{ F : \dim(E_2 \cap F_2) = 1 = \dim(E_2^{op} \cap F_2) \}$$

$$E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad E_2^{op} = \langle e_3, e_4 \rangle$$

$$\Rightarrow F_2 = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2, x_3 e_3 + x_4 e_4 \rangle$$

$$F_2, F_3 : \begin{pmatrix} x_1 & 0 & z_1 & x \\ x_2 & 0 & z_2 & x \\ 0 & x_3 & z_3 & x \\ 0 & x_4 & z_4 & x \end{pmatrix} \quad F_1, F_2, F_3 : \begin{pmatrix} y_1 x_1 \\ y_1 x_2 \\ y_2 x_3 & \dots \\ y_2 x_4 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{F_2} \quad \underbrace{\quad}_{F_3}$

F_3 es determinado por la relación de Plücker:

$$\Delta_{234} z_1 - \Delta_{134} z_2 + \Delta_{124} z_3 - \Delta_{123} z_4 = 0$$

Calculamos:

$$\Delta_{124} x_3 - \Delta_{123} x_4 = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & z_1 \\ x_2 & 0 & z_2 \\ 0 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & 0 & z_1 \\ x_2 & 0 & z_2 \\ 0 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} x_4$$

$$= x_3 x_4 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} - x_3 x_4 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad *$$

$$F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_1 = \langle y_1 (x_1 e_1 + x_2 e_2) + y_2 (x_3 e_3 + x_4 e_4) \rangle$$

$$\Rightarrow (\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4) = (y_1 x_1 : y_1 x_2 : y_2 x_3 : y_2 x_4)$$

$$\Rightarrow \Delta_{124} \Delta_3 - \Delta_{123} \Delta_4 = 0 \quad \text{contenido (peso)} \quad (1, 1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \text{esta relación se cumple en } R_{1324}^{4231} \quad \Delta_{34}=0 \quad \Delta_{12}=0$$

Pero no está en la suma de los ideales de X^{4231} y X_{1324} pieza de grado

$$w_3 + w_1 = (2, 1, 1, 0) \rightsquigarrow H^0(\mathcal{Y}(2, 1, 1, 0)) \quad w_3 + w_1$$

en Pluck

la única relación de Plücker con peso $(1, 1, 1, 1)$ y grado $(2, 1, 1, 0)$ es

$$\Delta_{123} \Delta_4 - \Delta_{124} \Delta_3 + \Delta_{134} \Delta_2 - \Delta_{123} \Delta_4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_{124} \Delta_3 - \Delta_{123} \Delta_4 \notin I(X^{4231}) + I(X_{1324})$$

$$\Rightarrow \text{en general: } I(R_u^w) \neq I(X^w) + I(X_u)$$

$$\text{en } H^0(R_u^w, \mathcal{Y}(3, 2, 1, 0)) \ni \Delta_{ij} (\Delta_{124} \Delta_3 - \Delta_{123} \Delta_4)$$

Afirmación: $H^0(\text{Fl}_4, \mathcal{Y}(3, 2, 1, 0))$

$$\text{e.g. } \Delta_{13} (\Delta_{124} \Delta_3 - \Delta_{123} \Delta_4) \quad I(\text{Fl}_4)$$

$$= \Delta_{123} (\Delta_{13} \Delta_4 - \Delta_{14} \Delta_3 + \Delta_{34} \Delta_1) + (\Delta_{123} \Delta_{14} - \Delta_{124} \Delta_{13} + \Delta_{134} \Delta_{12}) \Delta_3$$

$$- \Delta_{123} \Delta_{34} \Delta_1 - \Delta_{134} \Delta_{12} \Delta_3$$

$$\uparrow I(X^{4231}) \quad \uparrow I(X_{1324})$$

$$\in I(X^{4321}) + I(X_{1324})$$

Teorema: Sean $u \leq w$ en S_n y $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \geq 0$
 Entonces el ideal de R_u^w en grado λ es la
 suma de los ideales de X_u y X^w .

Teoría de monomios estándares:

Teorema / Def: Sean $u \leq w$ en S_n y μ una partición
 $\mu = w_{k_1} + w_{k_2} + \dots + w_{k_m} \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$

Consideramos $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ la partición transpuesta de μ

Sean $I_1, I_2, \dots, I_m$ una secuencia de subconjuntos de $[n]$

t.q. $\# I_i = k_i$ y decimos $(I_1, I_2, \dots, I_m)$ es

estándar para (u, w) si $\exists$ una cadena en S_n

$$u \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_m \leq w$$

t.q. $v_j[k_j] = I_j$

En este caso los monomios de Plücker $\prod_{j=1}^m \Delta_{I_j}$ son una
 base de $H^0(R_u^w, \mathcal{L}(\mu))$.
 ($(I_1, \dots, I_m)$ estándar para (u, w))

Sea $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq m$
 y $(I_{a_1}, \dots, I_{a_r})$ estándar

$\downarrow$
 $(I_{a_1}, \dots, I_{a_r})$ estándar

Ejemplo: $H^0(\mathcal{L}(2,1,0))$ y contenido $(1,1,1)$

$w_1 + w_2 \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \Delta_{12} \Delta_3 \text{ y } \Delta_{13} \Delta_2 \text{ SSYT}$

$I_1 = \{2,3\}, I_2 = \{1\} \quad \Delta_{23} \Delta_1$ no es SSYT

Afirmación: $\nexists v_1 \leq v_2 : v_1[2] = \{2,3\} \quad v_2[1] = \{1\}$

$v_1[1] \subset v_1[2] = \{2,3\} \Rightarrow v_1(1) \in \{2,3\}$

$v_2[1] = \{1\} \Rightarrow v_1(1) \leq v_2(1) \quad \nmid \quad v_1 \leq v_2$

$$\Delta_{12} \Delta_3 : \boxed{213 \leq 312} \quad 123 \leq 312, \quad 213 \leq 321 \\ 123 \leq 321 \quad \checkmark$$

$$\Delta_{13} \Delta_2 : \quad 132 \leq 231 \quad \checkmark$$

¿Cuáles son (u, w) t.q. los monomios son estándar para R_u^w ?

$$u \leq 213 \leq 312 \leq w$$

$$u \leq 132 \leq 231 \leq w \rightarrow \text{e.g. } \begin{matrix} \text{no es estándar} \\ \text{para} \\ X_{213} \end{matrix}$$

en $X_{213} : \Delta_{13} \Delta_2 = \Delta_{12} \Delta_3$ se cumple

porque $\underbrace{\Delta_1 \Delta_{23} - \Delta_{13} \Delta_2 + \Delta_{12} \Delta_3}_{=0} = 0$

porque $\Delta_1 = 0$ en X_{213}

Ej:

$$w = 4231, \quad u = 1324$$

$$\mu = \begin{matrix} \downarrow \\ (2, 1, 1, 0) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{grado} \\ \text{peso} \end{matrix}$$

$$(1, 1, 1, 1)$$



$$4, 1, 2, 3, 4, 3$$

$$\underbrace{\Delta_{123} \Delta_4, \Delta_{124} \Delta_3, \Delta_{134} \Delta_2}_{\text{SSYT}}, \quad \underbrace{\Delta_{234} \Delta_1}_{\begin{matrix} \boxed{2 \mid 1} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{matrix}} \in H^0(\mathcal{A}(2, 1, 1, 0))$$

$2 > 1 \quad \downarrow$

en $R_u^w \quad \Delta_{124} \Delta_3 = \Delta_{123} \Delta_4$
estándar

Afirmación: $\Delta_{124} \Delta_3$ no es estándar para (u, w)

sup. que sí lo es, $\exists \quad 1324 \leq v_1 \leq v_2 \leq 4231$

$$v_1[3] = 124 \quad v_2[1] = 3$$

$$\Rightarrow v_1[2], v_2[2] \in \{13, 14, 23, 24\}$$

$$\begin{aligned} v_1[2] &\subset v_1[3] \Rightarrow v_1[2] \in \{14, 24\} \\ v_2[3] &\supset v_2[2] \Rightarrow v_2[2] \in \{13, 23\} \end{aligned} \quad \Downarrow \quad \checkmark$$

Lema: Sean $n \geq k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 1$ y $I_1, I_2, \dots, I_m \subset [n]$ con $k_i = \# I_i$. Entonces $I_1, \dots, I_m$ son las columnas de un SSYT $\Leftrightarrow \exists$ una cadena $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_m$ en el orden de Bruhat t.q. $v_i[k_i] = I_i$.

Pueba: " $\Leftarrow$ " Supongamos que $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_m$ es una cadena con $v_i[k_i] = I_i$.
 P.D.: las filas del tableau con col. $I_1, \dots, I_m$ son crecientes.

$$\begin{aligned} \text{Definimos } \{x_1 < x_2 < \dots < x_{k_i}\} &= I_i = v_i[k_i] \\ \{y_1 < y_2 < \dots < y_{k_i}\} &= v_{i+1}[k_i] \\ \{z_1 < z_2 < \dots < z_{k_{i+1}}\} &= I_{i+1} = v_{i+1}[k_{i+1}] \end{aligned}$$

x_j y z_j son la i -ésima y $(i+1)$ -ésima entrada en la j -ésima fila

P.D. $x_j \leq z_j$

$$\begin{aligned} v_i \leq v_{i+1} &\Rightarrow v_i[k_i] \leq v_{i+1}[k_i] \\ &\Rightarrow x_j \leq y_j \quad \forall 1 \leq j \leq k_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_i \geq k_{i+1} &\Rightarrow v_{i+1}[k_i] \geq v_{i+1}[k_{i+1}] \\ &\Rightarrow y_j \leq z_j \quad \forall 1 \leq j \leq k_{i+1} \\ &\Rightarrow x_j \leq z_j \quad \checkmark \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ "

Def: una permutación es de tipo montaña si es de forma

$$\underbrace{a_1 < a_2 < \dots < a_{j-1}} < \underbrace{n} < \underbrace{b_1 < b_2 < \dots < b_{n-j}}$$

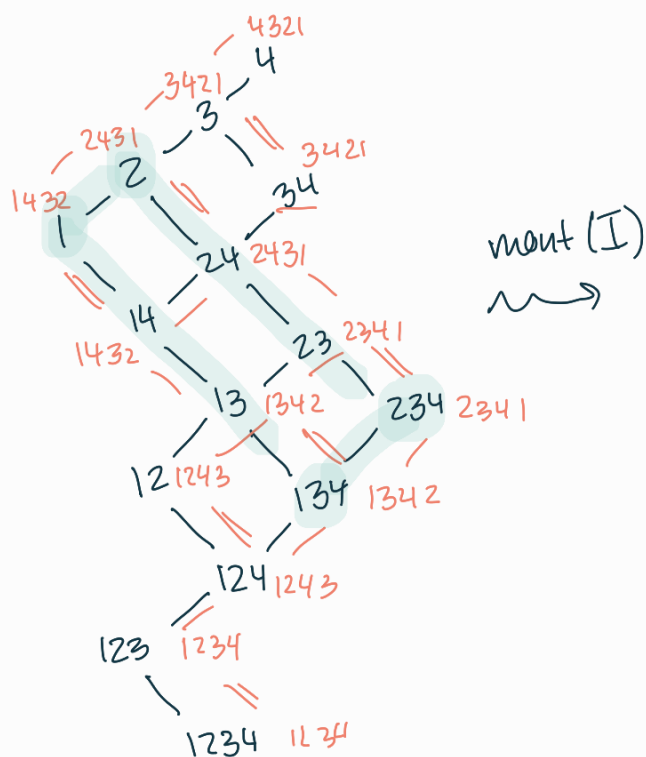
Sea $I \subset [n]$ definimos $\text{mont}(I)$ una permutación montaña asociado: (dos casos)

si $n \notin I$ $\text{mont}(I) = a_1 < a_2 < \dots < a_{j-1} < n < \dots$ lo que queda
 $I = \{a_1, \dots, a_j\}$

si $n \in I$ definimos $\text{mont}(I)$ como la permut. de mont . única con $I \setminus n = \{a_1, \dots, a_j\}$

Afirmación: si $I_1, \dots, I_k$ son las columnas de un SSYT entonces $v_j = \text{mont}(I_j)$ determina una cadena de B-whet correspondiente.

Ejemplo: $n=4$: I abajo de J si I puede preceder a J en un SSYT



Lema: Sea $u \in S_n$ y $J \in \binom{[n]}{k}$ con $u[k] \leq J$

Entonces, $\exists$ una permutación $\leq$ -minimal en el

conjunto $\{x \in S_n : u \leq x \text{ y } x[k] = J\}$

Idea de la prueba: construimos x t.q. $x[k] = J$
 $x[k+1, n] = [n] \setminus J$

construimos $x_1, \dots, x_k$ ($x_i := x(i)$)

Sea $r \leq k$ y $X_r = \{K \in \binom{J}{r} : K \geq u[r]\}$

es una retícula resp. $\leq$

y X_r es cerrado bajo las operaciones join y meet

$\Rightarrow X_r$ tiene un elemento minimal, denotado por J_r

Afirmación: $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_k = J$

Supongamos: $J_r \not\subset J_{r+1}$ $J_{r+1} \geq u[r+1]$

$\Rightarrow \exists J' \subset J_{r+1}, \#J' = r$ con $J' \geq u[r]$

escogimos J' minimal con esta propiedad y sea $\{j\} = J_{r+1} \setminus J'$

$J' \geq u[r]$ $\overset{J_r \text{ min.}}{\Rightarrow} J' \geq J_r$ y $J_r \not\subset J_{r+1} \Rightarrow J' \neq J_r$
 $\Rightarrow J' > J_r$
 $\overset{J' \cup \{j\}}{J_{r+1} > J_r \cup \{j\} \geq u[r+1]}$

Entonces $J_{r+1} > J_r \cup \{j\} \geq u[r+1]$ $\hookrightarrow$
 $\in X_{r+1}$ pero J_{r+1} es minimal en X_{r+1}

$\Rightarrow J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_k = J$

definimos x_r t.q. $J_r \setminus J_{r-1} = \{x_r\}$ ($J_0 = \emptyset$)

Algoritmo:

Input: T SST, (u, w)

output: una cadena levantando T

o error si T no es estándar resp. (u, w)

Sean $I_1, \dots, I_m$ las columnas de T ($k_j = \# I_j$)

Sea $x_0 = u$ y de manera inductiva sea x_j

la permutación minimal con $x_j \neq x_{j-1}$ y $x_j[k_j] = I_j$.

Si en algún momento no existe $x_j \Rightarrow T$ no es estándar
resp. (u, w)

y si $x_m \neq w \Rightarrow T$ no es estándar resp. (u, w)

Sean $x_0, x_1, \dots, x_m$ como en el algoritmo

t.q. x_i son definidos y $x_m \leq w$

$\Rightarrow u \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \leq w$ con $x_j[k_j] = I_j$

$\Rightarrow$ la cadena levanta $T \Rightarrow T$ es estándar
resp. (u, w)