

El complejo simplicial de monomios estándar

Sean $u \leq w$ y $I_1, I_2, \dots, I_m \subset [n]$ no vacíos

Si $I_1, I_2, \dots, I_m$ son las columnas de un SSYT y son estándar para (u, w) entonces $I_{a_1}, I_{a_2}, \dots, I_{a_r}$ da un SSYT y es estándar para $(u, w) \quad \forall 1 \leq a_1, a_2, \dots, a_r \leq m$

Definimos el complejo simplicial $\Delta(u, w)$ con vértices subconjuntos $\neq \emptyset$ de $[n]$ y caras $I_1, I_2, \dots, I_m$ correspondiendo a columnas de un SSYT estándar para (u, w)

Definimos el complejo simplicial $\Delta_k(u, w)$ a partir de $\Delta(u, w)$ consistiendo solo de los I_j con $\# I_j = k$.
[Knutson-Lam-Speyer]

Prop.

Sean $u \leq_k w$ y $u' \leq_k w'$ t.q. $\pi_u^w = \pi_{u'}^{w'}$
entonces $\Delta_k(u, w) = \Delta_k(u', w')$

Teo.

$$\dim \Delta_k(u, w) = l(w) - l(u)$$

$\Delta_k(u, w)$ es puro

$\Delta_k(u, w)$ es shellable*

$\Delta_k(u, w)$ es homeomorfo a un pelota

* un complejo simplicial de dim. d . es shellable si podemos ordenar sus simplices de dim d $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ t.q. $\sigma_j \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} \sigma_i$ es puro de dim $d-1$ (o vacío) $\forall j$

Es de interés porque

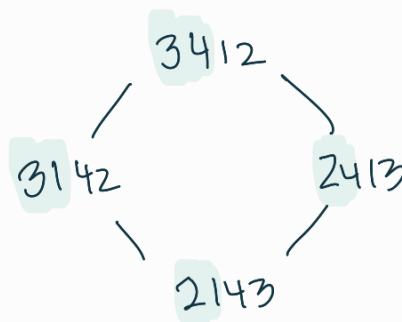
$\Delta_K(u, w)$ shellable

+ $\Delta_K(u, w)$ corresponde a una orden. de Gröbner de Π_u^w

$\Rightarrow \mathbb{C}[\Pi_u^w]$ es Cohen-Macaulay.

Ejemplos: $n=4$

1) $2143 \leq 3412$
 $u \quad w$



Enfocamos en $\Delta_2(2143, 3412)$

$\Rightarrow$ caras maximales son $\{12, 13, 34\}$ y $\{12, 24, 34\}$

$\Rightarrow$ monomios estándares son $\Delta_{12}^a \Delta_{13}^b \Delta_{34}^c$ y $\Delta_{12}^a \Delta_{24}^b \Delta_{34}^c$

$\Rightarrow$ base de $K[\Pi_u^w] = K[\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{24}, \Delta_{34}]$
 $\Delta_{14} = \Delta_{23} = 0$ $\Delta_{12}\Delta_{34} - \Delta_{13}\Delta_{24}$

2) Sean $2134 \leq 3412$

$K=2$

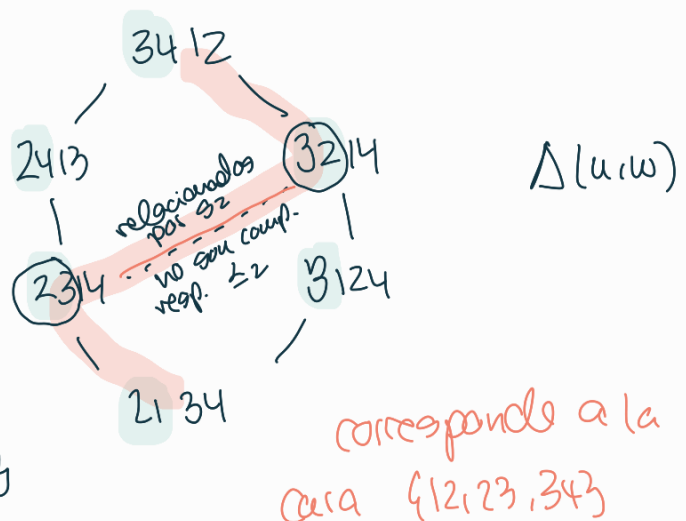
dos cadenas maximales dan 2 simplicios maximales

$\{12, 23, 24, 34\}$ y $\{12, 13, 23, 34\}$

$\Pi_u^w = \{ \Delta_{14} = 0 \}$

una base para $K[\Pi_u^w]$ es

$\Delta_{12}^a \Delta_{23}^b \Delta_{24}^c \Delta_{34}^d$
 $\Delta_{12}^a \Delta_{13}^b \Delta_{23}^c \Delta_{34}^d$



Problema abierto:

¿ $\Delta(u, w)$ es shellable?

¿ Cuales son sus caras maximales?

↳ tienen información sobre comp. max. en una desgen. de X_u^w

Ejemplo: Sea $I_k = [k+1] \setminus \{k\}$
 $= \{1, 2, \dots, k-1, k+1\}$

Sea T es SYT con columnas $I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_2, I_1$

$n=5$

1	1	1	2
2	2	3	
3	4		
5			

definimos $w = 51w_0 = n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ 54312$

Afirmación: T no es estándar X^w

pero $T \setminus I_j$ (menos cualquier columna) si es estándar para X^w

$\Rightarrow$ para $\Delta(e, w)$ T define una no cara minimal

$\neg T$ no es estándar

definimos $v_n = 123 \dots \hat{k} \dots n-1 \ n \ k$

$\Rightarrow v_{n-1} \leq v_{n-2} \leq \dots \leq v_1$

pero $v_1 = 234 \dots n-1 \ n \ 1$

$w = n \ n-1 \ n-2 \ \dots \ 54312$

$v_1[n-1] = [n] \setminus \{k+1\}$

$v_1[n-1] = [n] \setminus 1 > w[n-1] = [n] \setminus 2$

$\Rightarrow v_1 \neq w \Rightarrow T$ no es estándar

II $T \setminus I_k$ es estándar

$\hookrightarrow$ tiene columnas $I_{n-1} I_{n-2} \dots \hat{I}_k \dots I_2 I_1$

Sea $(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{k+1}, u_{k+1}, \dots, u_1)$ el lift minimal

$$j \geq k+1 : u_j = 123 \dots \hat{j} \dots n-1 \ n \ j$$

$$u_{k+1}(n) = k+1$$

pero $k+1 \notin I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_1$

$$\text{def. } u_j(n) = k+1 \quad j \leq k-1$$

en este caso se puede verificar $u_i \leq w$

$\Rightarrow T \setminus I_k$ es estándar.

Variedades Bott-Samelson

Sean $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_a}$ sec. de transp. simples en S_n

Definimos la variedad de Bott-Samelson abierta

$$BS^0(s_{i_1}, \dots, s_{i_a}) \subset Fl_n^{a+1}$$

consiste de $(F^0, F^1, \dots, F^a)$ t.q. $F^0 = eB_+$

$$F^{j-1} \xrightarrow{s_{i_j}} F^j$$

(es decir $F_i^{j-1} = F_i^j \forall i \neq i_j$ y $F_{i_j}^{j-1} \neq F_{i_j}^j$)

$BS(s_{i_1}, \dots, s_{i_a}) \subset Fl_n^{a+1}$ consiste de

$(F^0, \dots, F^a)$ t.q. $F^{j-1} \xrightarrow{s_{i_j}} F^j$ o $F^{j-1} = F^j$

Lema: $BS(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ es suave de dimensión a
3.4 y es un $\mathbb{P}^1$ -haz iterado sobre un punto

$$BS^0(s_{i_1}, \dots, s_{i_a}) \cong \mathbb{A}^a$$

Teorema: Sea $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ una palabra en S_n
3.3 y $w = s_{i_1} * \dots * s_{i_a}$ el producto de Demazure

Sea $\pi: BS(s_{i_1}, \dots, s_{i_a}) \rightarrow Fl_n$ proyectando a la última bandera en la secuencia.

Entonces la imagen de π es X^w .

Si $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ es palabra reducida para w
entonces $\pi|_{BS^0(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_a})} \xrightarrow{\sim} X^w$ es un isom.

y $\pi: BS(s_{i_1}, \dots, s_{i_a}) \rightarrow X^w$ es biracional.

$\Rightarrow BS(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ es una resolución de sing. para X^w .

§4 Piezas de Deodhar

Sea $(s_i, \dots, s_a)$ sec. de transp. simples en S_n
 y $(\tau^0, \dots, \tau^a) \in BS^0(s_i, \dots, s_a)$

Sean $v_j \in S_n$ t.q. $\tau^j \in X_{v_j}^0$

para $(v^0, v^1, \dots, v^a)$ sea $D_{\text{sec}}(v^0, \dots, v^a)$ la variedad
 (localmente cerrada de $BS^0(s_i, \dots, s_a)$) correspondiend
 a estas células de Schubert. $\rightarrow$ pieza Deodhar

Si $(s_i, \dots, s_a)$ es palabra reducida de w
 $\Rightarrow BS^0(s_i, \dots, s_a) \stackrel{\sim}{=} X^w$

En este caso $R_u^w = \bigcup_{v^1, \dots, v^{a-1}} D_{\text{sec}}(v^0, \dots, v^{a-1}, u)$

Lema: Sea $(\tau^0, \tau^1, \dots, \tau^a) \in BS^0(s_i, \dots, s_a)$ con $\tau^j \in X_{v_j}^0$
 $\forall 1 \leq j \leq a$ una de las siguientes cond. se cumple:

(1) $v_j = v_j^{-1}$ y $v_j^{-1} s_{ij} > v_j$

(2) $v_j = v_j^{-1} s_{ij}$ y $v_j^{-1} < v_j$

(3) $v_j = v_j^{-1} s_{ij}$ y $v_{j-1} > v_j$

Prueba: $i = ij$

τ^j y τ^{j-1} coinciden en todos subespacios menos
 en la posición i :

$$\tau^j = (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1})$$

$$\tau^{j-1} = (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots, v_{n-1})$$

$$\Rightarrow v_j = v_j^{-1} \quad \text{o} \quad v_j = v_j^{-1} s_i$$

P.D. si $v_j = v_j^{-1}$ entonces $v_j s_i > v_j$

El conjunto de banderas de forma

$$(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, X, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}) \text{ es un } \mathbb{P}^1$$

con punto generico en X_v con $v: l(vs_i) > l(v)$

y un punto en X_{vs_i}

$F^j \neq F^{j-1} \Rightarrow$ no pueden ser los dos el punto unico X_{vs_i}

$$\text{Si } v^j = v^{j-1} \Rightarrow v^j = v^{j-1} = v$$

$$\Rightarrow \underbrace{v^j s_i = v s_i} > v = \underbrace{v^{j-1}}$$

Def: $(v^0, v^1, \dots, v^a)$ es una secuencia distinguida de $(s_1, \dots, s_a)$ para u si $v^0 = e$, $v^a = u$ y para cada $1 \leq i \leq a$ se cumple (1) o (2) o (3) del lema

$\Rightarrow$ como $v^j = v^{j-1}$ o $v^j = v^{j-1} s_{ij}$ las secuencias distinguidas corresponden a subpalabras de $(s_1, \dots, s_a)$

Notación: secuencias distinguidas son ^{sub}palabras en $\{s_1, \dots, s_a, \bullet\}$ $\leadsto$ llamamos ^{sub}palabras distinguidas

Sea x es una subpalabra distinguida notamos con $D(x)$ la pieza Deodhar corresp.

Ejemplo Sea $n=3$, $u=s_1$, $w=w_0$, $(s_1, \underline{s_2}, s_1)$

en (s_1, s_2, s_1) tenemos dos subpalabras para s_1

$(s_1, \bullet, \bullet)$ resp. $(\bullet, \bullet, s_1)$

$\Rightarrow$ corresponden a secuencias de permutaciones

$$\underbrace{(e, s_1, s_1, s_1)} \text{ resp. } \underbrace{(e, e, e, s_1)}$$

no es distinguida

es sec. distinguida

$$j=3 \quad v^{j-1} s_i = s_1 s_2 > s_1 = v^j \quad \nless$$

$\Rightarrow \check{R}_u^w$ solo tiene una pieza Deadha

$$D_{sec}(e, e, e, s_1) = D(\bullet, \bullet, s_1)$$