

Positividad Total

Positividad Total en matrices:

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $I = \{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq [m]$ y $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subseteq [n]$.

El menor asociado a I, J es:

$$\Delta_{I,J}(A) = \det \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & \dots & a_{i_1, j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k, j_1} & \dots & a_{i_k, j_k} \end{pmatrix}$$

Diremos que:

* A es totalmente positiva si $\Delta_{I,J}(A) > 0$, $\forall I, J$

* A es totalmente no negativa si $\Delta_{I,J}(A) \geq 0$, $\forall I, J$

Teorema de Cauchy-Binet:

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$

$$\Rightarrow \Delta_{I,J}(AB) = \sum_{K \in \binom{[k]}{r}} \Delta_{I,K}(A) \Delta_{K,J}(B)$$

donde $I \in \binom{[m]}{r}$ y $J \in \binom{[n]}{r}$.

Consideremos $m=n$.

Corolario: el conjunto de matrices totalmente no negativas (resp. totalmente positivas) forma un monoide con la multiplicación (resp. semigrupo).

Recordatorio:

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ base (estándar) de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

es base de $\wedge^k(\mathbb{R}^n)$. Dado un subespacio $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \in G(k, n)$

e $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\} \subseteq [n]$, definimos

$$\Delta_I(V) := \text{coeficiente de } v_1 \wedge \dots \wedge v_k \text{ respecto a } e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \quad (\text{coordenada de Plücker})$$

Si consideramos

$$M_V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k]_{n \times k}$$

matriz que tiene a los v_i
como columnas.

entonces $\Delta_I(V) = \Delta_{I,[k]}(M_V)$. Tenemos el encaje de Plücker:

$$G(k,n) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$
$$V \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \mapsto [\Delta_I(V)]_{I \in \binom{[n]}{k}}$$

No negatividad Total en espacios vectoriales

Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacio, diremos que V es TNN si $\Delta_I(V) \geq 0$
 $\forall I \in [n]$ salvo cambio de signo (global). Denotamos:

$$Gr(k,n)_{\geq 0} := \{V \subseteq \mathbb{R}^n \mid V \text{ es TNN}\}$$

Grassmanniana
totalmente no
negativa

Dada $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n$ una bandera (completa), diremos que es
TNN si F_k es TNN $\forall k$. Denotamos:

$$Fl_n^{\geq 0} = \{F. \mid F. \text{ bandera TNN}\}$$

Ejemplo: Consideremos

$$Fl_3(\mathbb{R}) = \{(V_1, V_2) \mid V_1 \subseteq V_2, \dim(V_i) = i\} \subseteq G(1, \mathbb{R}^3) \times G(2, \mathbb{R}^3).$$

Tenemos los encajes:

$$G(1, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \quad G(2, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$
$$V \mapsto [\Delta_1(V) : \Delta_2(V) : \Delta_3(V)] \quad V \mapsto [\Delta_{12}(V) : \Delta_{13}(V) : \Delta_{23}(V)]$$

¿Cómo podemos describir un elemento en $Fl_3^{\geq 0}(\mathbb{R})$?

Sean $(V_1, V_2) \in Fl_3(\mathbb{R})$, pongamos $V_1 = \langle \vec{a}_1 \rangle$ y $V_2 = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$

Se tiene que $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, y cualquier $\vec{b} \parallel \vec{a}_1$ genera V_1 , por lo que V_1 queda determinado por $\underbrace{[a_1^1 : a_1^2 : a_1^3]}_{\in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})}$, donde $\vec{a} = (a_1^1, a_1^2, a_1^3)$

Entonces, V_2 queda determinado por la siguiente ecuación:

$$\det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & x_1 \\ a_1^2 & a_2^2 & x_2 \\ \underbrace{a_1^3 & a_2^3}_{M_{V_2}} & x_3 \end{pmatrix} = 0$$

que es equivalente a

$$\Delta_{23}(V_2) x_1 - \Delta_{13}(V_2) x_2 + \Delta_{12}(V_2) x_3 = 0 \dots (I)$$

Cualquier $\vec{V} = (x_1, x_2, x_3)$ cumpliendo (I) está en V_2 , por lo que V_2 está determinado por:

$$\mathcal{L} = \left\{ [x_1 : x_2 : x_3] \mid \Delta_{23}(V_2) x_1 - \Delta_{13}(V_2) x_2 + \Delta_{12}(V_2) x_3 = 0 \right\}$$

Note que $[a_1^1 : a_1^2 : a_1^3] \in \mathcal{L}$. Así, un elemento en $\mathbb{F}l_3(\mathbb{R})$ determina un par $(P, \mathcal{L})$, donde

$$* P = [\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

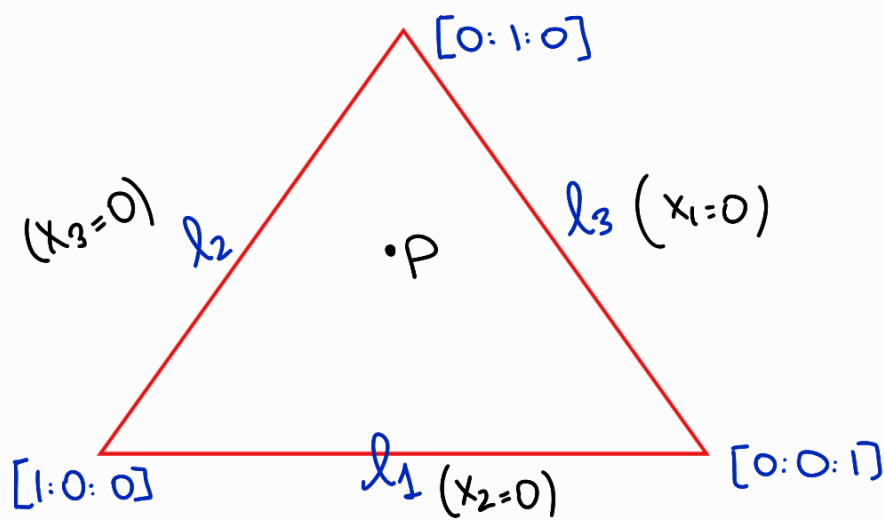
$$* \mathcal{L} = \left\{ [x_1 : x_2 : x_3] \mid \Delta_{23} x_1 - \Delta_{13} x_2 + \Delta_{12} x_3 = 0 \right\} \text{ con } P \in \mathcal{L}.$$

Para que $(V_1, V_2) \in \mathbb{F}l_3^{\geq 0}(\mathbb{R})$ tenemos que tener que:

$$\Delta_1(V_1), \Delta_2(V_1), \Delta_3(V_1), \Delta_{12}(V_2), \Delta_{13}(V_2), \Delta_{23}(V_2) \geq 0$$

* Si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \geq 0$, entonces P pertenece al triángulo en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinado por $[1:0:0], [0:1:0], [0:0:1]$.

$$[\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3] = \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_3} : \frac{\Delta_2}{\Delta_3} : 1 \right]_{\Delta_3 \neq 0}$$



* Si $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{23} \geq 0$, supongamos que $\Delta_{12} > 0$ (si $\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$ entonces $V_2 = \mathbb{R}^3$). Veamos dos casos:

1°) P está en el interior del triángulo: intersectemos $\ell \cap \{x_2 = 0\}$, la ecuación que determina ℓ quedaría:

$$\Delta_{23}x_1 + \Delta_{12}x_3 = 0 \dots (\text{II})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [x_1 : 0 : x_3] &= [\Delta_{12}x_1 : 0 : \Delta_{12}x_3] \\ &= [\Delta_{12}x_1 : 0 : -\Delta_{23}x_1] \quad x_1 \neq 0 \\ &= [\Delta_{12} : 0 : -\Delta_{23}] \end{aligned}$$

Si $\Delta_{23} = 0$, de (II) tendríamos que $x_3 = 0$

$$\Rightarrow \ell = \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid \Delta_{13}x_2 = 0\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{necesariamente } \Delta_{13} > 0 \\ \text{caso contrario } \ell \text{ contiene} \\ \text{a } \ell_1 \text{ y } P \text{ estaría en} \\ \text{el interior} \end{array} \right)$$

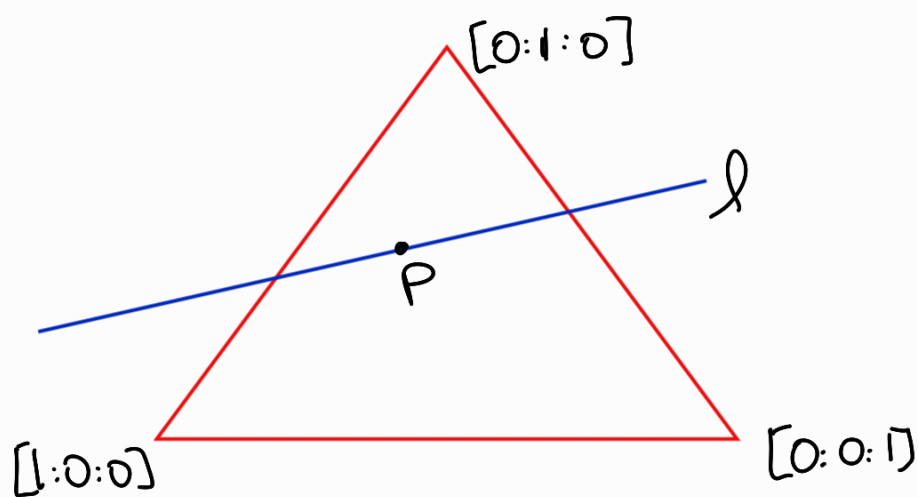
y esto es imposible pues P está en el interior.

Así $\Delta_{23} > 0$, con lo que

$$\underbrace{[\Delta_{12} : 0 : -\Delta_{23}]}_{\substack{>0 \\ <0}} \in \ell \cap \{x_2 = 0\}, \text{ contradicción}$$

Entonces $\ell \cap \ell_1 = \emptyset$, por lo que ℓ intersecta al triángulo en los lados determinados por

$$[1:0:0], [0:1:0] \quad \text{y} \quad [0:1:0], [0:0:1]$$



2°) Si p está en la frontera, por ejemplo $P = [1:0:0]$, vemos que l siempre intersecta al triángulo. Supongamos que no es así.

Sea $[x_1:x_2:x_3] \in l \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$.

Tenemos $V_1 = \langle (1,0,0) \rangle$ y $V_2 = \langle (1,0,0), (a,b,c) \rangle$

donde $(b,c) \neq (0,0)$. Calculando:

$$\Delta_{12}(V_2) = b, \quad \Delta_{13}(V_2) = c, \quad \Delta_{23}(V_2) = 0$$

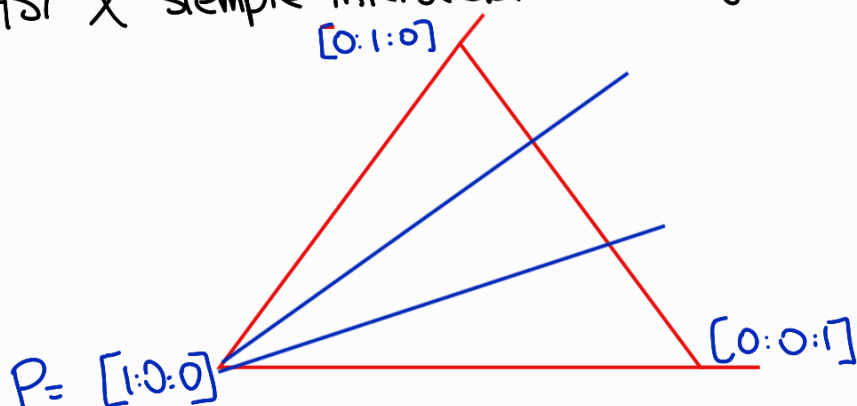
$$\Rightarrow l = \{[x_1:x_2:x_3] \mid bx_3 - cx_2 = 0\}$$

Supongamos $b \neq 0$ y $[x_1:x_2:x_3] \in l$ ($x_2 \neq 0$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow [x_1:x_2:x_3] &= [bx_1:bx_2:bx_3] = [bx_1:bx_2:cx_2] \\ &= \left[\frac{bx_1}{x_2} : b : c \right] \end{aligned}$$

Como $p \in l \Rightarrow \exists x_1, x_2 \mid [1:0:0] = \left[\frac{bx_1}{x_2} : b : c \right]$, imposible.

Así l siempre intersecta al triángulo.



Lema: Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ TNN y $g \in GL_n$ TNN. Entonces gV es TNN.
 Análogamente, si F es una bandera TNN y $g \in GL_n$ TNN, entonces gF es TNN.

Prueba: Si $V = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \rangle \Rightarrow gV = \langle g\vec{v}_1, \dots, g\vec{v}_k \rangle$

$$\Rightarrow M_{gV} = [g\vec{v}_1 \dots g\vec{v}_k] = g[\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k] = gM_V$$

Así $\Delta_I(gV) = \Delta_{I, [k]}(M_{gV}) = \Delta_{I, [k]}(gM_V)$, por Cauchy

Binet :

$$\Delta_{I, [k]}(gM_V) = \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} \underbrace{\Delta_{I, J}(g)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta_{J, [k]}(M_V)}_{\geq 0} \geq 0$$

Lo último es una consecuencia inmediata de lo anterior. $\square$

Proposición: V es TNN con $\dim(V) = k$, existe F bandera TNN tal que $F_k = V$.

Prueba: Tenemos que construir

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_{k-1} \subseteq V \subseteq F_{k+1} \subseteq \dots \subseteq F_{n-1}$$

Sean $\{x_i\}$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Sea j tal que

$$x_{j+1} = x_{j+2} = \dots = x_n = 0 \quad \text{y} \quad x_j \neq 0 \quad (\text{en } V)$$

Ponemos $V' = V \cap \{x_j = 0\}$. Podemos escoger $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}\}$ base de V'
 y $\vec{v}_k = e_j + \sum_{i < j} c_i e_i$ tal que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ base de V .

$$\text{Luego: } M_V = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k] = \begin{bmatrix} M_{V'} & \vdots & \begin{matrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_J(V') = \begin{cases} \Delta_{J \cup \{j\}}(V), & \text{si } J \in [j-1] \\ 0 & , \text{ si } J \notin [j-1] \end{cases}$$

Así V' es TNN, ponemos $V' = F_{k-1}$ y así continuamos $\square$