

$$\Rightarrow \Delta_J(V') = \begin{cases} \Delta_{J \cup \{j\}}(V), & \text{si } J \in [j-1] \\ 0 & , \text{ si } J \notin [j-1] \end{cases}$$

Así V' es TNN, ponemos $V' = F_{k-1}$ y así continuamos $\square$

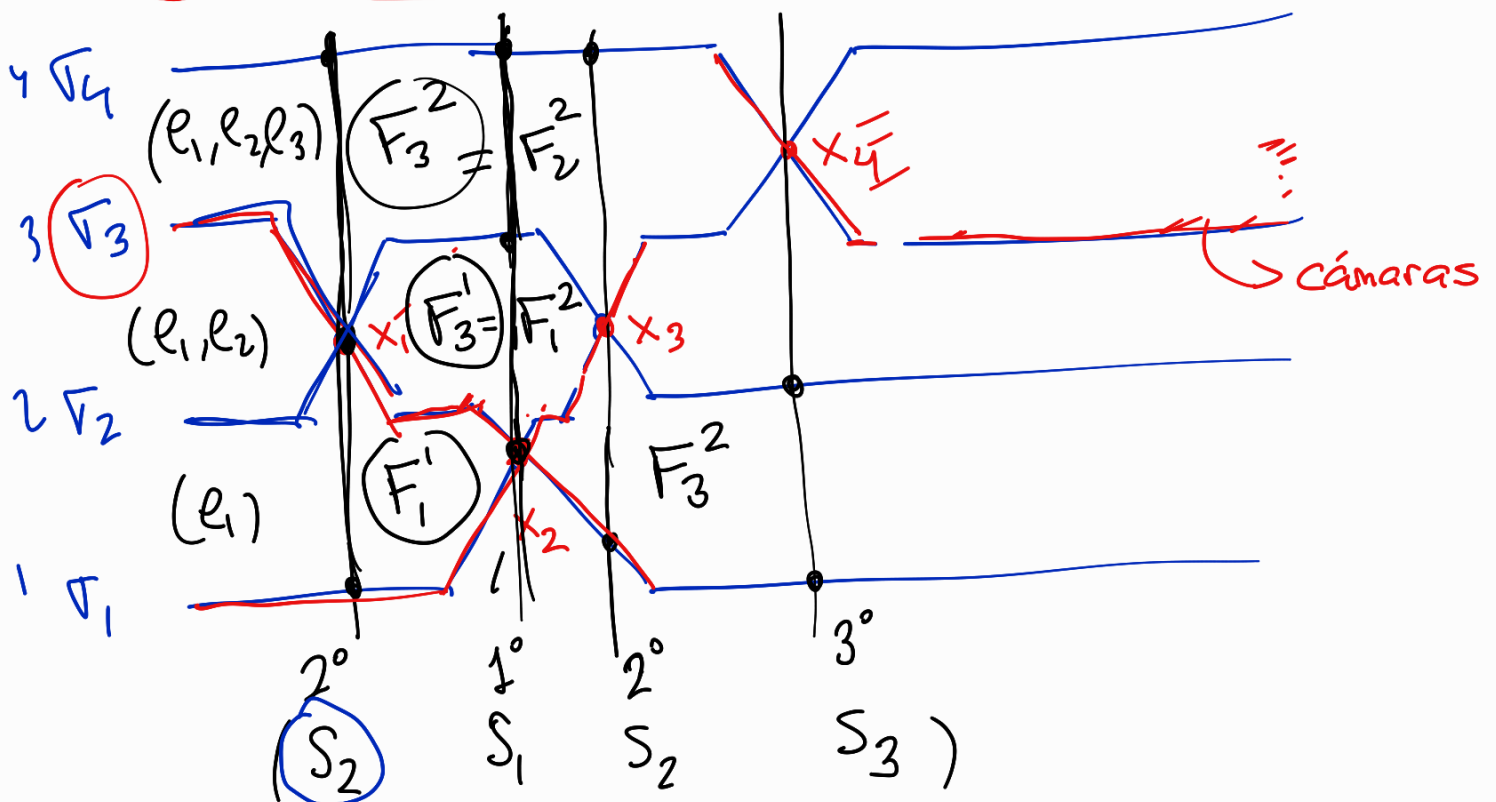
Recordatorio:

Sea $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$, definimos:

* $BS^\circ(i_1, \dots, i_a) \subseteq J\ell_n^{a+1}$, consiste $(F^0, F^1, \dots, F^a)$
tales que $F^0 = e_{B_+}$, $F^{j-1} \xrightarrow{s_{ij}} F^j$ $\begin{cases} F_i^{j-1} = F_i^j, i \neq i_j \\ F_i^{j-1} \neq F_i^j, i = i_j \end{cases}$

* $BS(i_1, \dots, i_a) \subseteq J\ell_n^{a+1}$, consiste $(F^0, \dots, F^a)$
tales que $F^0 = e_{B_+}$, $\underline{F^{j-1} \xrightarrow{s_{ij}} F^j}$ ó $\underline{F^{j-1} = F^j}$

Wiring Diagrams:



Una cámara está a la altura " i ". Si " i ". cables pasan por debajo

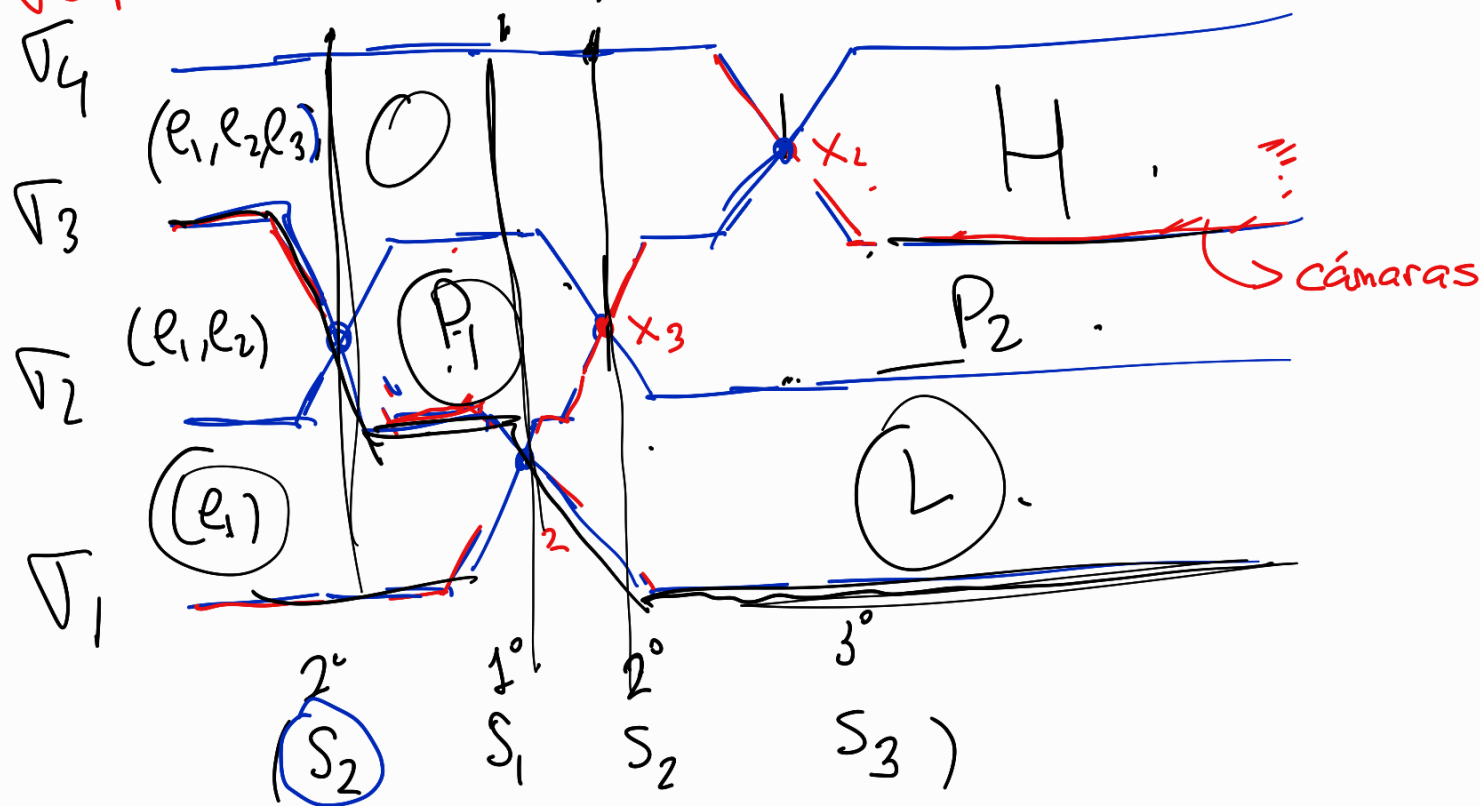
* Sea $(F^0, \dots, F^a) \in BS^0(\underline{i}_1, \dots, \underline{i}_a)$

escribimos $(F_1^j, \dots, F_{n-1}^j)$ de F^j en las cámaras

talque $F_{i,j}^j$ esté a la altura $\underline{i}$

Los elementos de $BS(\underline{i}_1, \dots, \underline{i}_a)$ es el espacio de todas las formas que tenemos de etiquetar a las cámaras del diag. de cables asociado a $s_{i_1}, \dots, s_{i_a}$ talque la cámara etiq. a la altura " i " tiene dimensión i .

Ejemplo: $BS(2, 1, 2, 3)$



Los elementos de $BS(2, 1, 2, 3)$ serán (L, P_1, P_2, H) tales que

$$\underline{\dim L = 1}, \quad \underline{\dim P_1 = \dim P_2 = 2}, \quad \underline{\dim H = 3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F^0 = (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle) \\ F^1 = (\langle e_1 \rangle, P_1, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle) \\ F^2 = (L, P_1, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle) \\ F^3 = (L, P_2, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle) \\ F^4 = (L, P_2, H) \end{array} \right.$$

* Producto de Matrices en $BS(i_1, \dots, i_a)$

$$* \rho_p : GL_2 \rightarrow GL_n$$

$$[a \ b] \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & [a \ b]_1 \dots 1 \end{bmatrix}$$

a está en la
fila i , columna i .

$$* \underbrace{Z_i(t)} = P_i \left(\underbrace{\begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & t & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \dots \end{bmatrix}$$

Definimos :

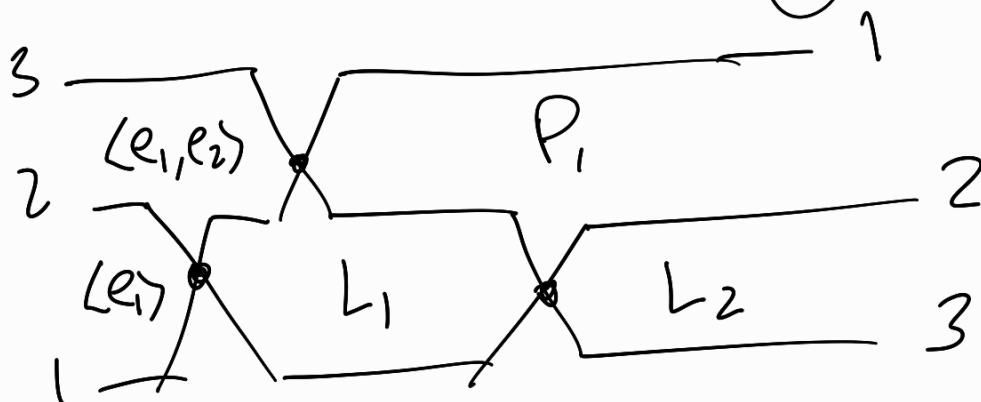
$$\mathbb{A}^n \rightarrow \text{Fl}_n^{a+1}$$

$$(t_1, \dots, t_a) \mapsto (B_+, \overbrace{Z_{i_1}(t_1) B_+}^{\downarrow}, \overbrace{Z_{i_1}(t_1) Z_{i_2}(t_2) B_+}, \dots, \overbrace{Z_{i_1}(t_1) \dots Z_{i_a}(t_a) B_+})$$

Prop: lo anterior define un isomorfismo $A^a \cong \overline{BS^0(i_1, \dots, i_a)}$

Ejemplo:

$$BS(1,2,1) \sim s_1 s_2 (s_1)$$



$$* L(e_1) \subseteq \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$* L_1 \subseteq P_1$$

$$* L_1 \subseteq \langle e_1, e_2 \rangle$$

$$* L_2 \subseteq P_1$$

$$A^3 \longrightarrow \underbrace{Fl_3^4}_{Z_1(t_1)}$$

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B_+}, \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_+}, \right.$$

$$\left. \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Z_1(t_1)Z_2(t_2)} B_+, \begin{bmatrix} t_1 t_3 + t_2 & t_1 & 1 \\ t_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_+ \right)$$

Descomposición de Deadhar:

Sea $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ una palabra en S_n y $(F^0, \dots, F^a) \in BS^0(i_1, \dots, i_a)$

Sea v^j la permutación tal que $F^j \in X_{v^j}$

Dada $(v^0, \dots, v^a)$, definimos

$$\mathcal{D}_{\text{seq}}(v^0, \dots, v^a) \subseteq BS^0(i_1, \dots, i_a)$$

formada por las secuencias de banderas que están en las respectivas células de Schubert.

Si $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ es reducido piezas de Deadhar

$$\Rightarrow \underline{\tilde{R}}_{\mu}^w = \bigcup_{v^0, \dots, v^{a-1}} \mathcal{D}_{\text{seq}}(v^0, \dots, v^{a-1}, \mu)$$

Diremos que $(v^0, v^1, \dots, v^a)$ es ^(una sucesión) distinguida de $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$

para μ si:

* $v^0 = e$, $\underline{v^a = \mu}$.

* $\forall j$ se cumple alguna de estas condiciones:

$$\begin{cases} (1) & v^j = v^{j-1}, & v_j s_{i_j} > v_j \\ (2) & v^j = v^{j-1} s_{i_j}, & v_{j-1} < v_j \\ (3) & v^j = v^{j-1} s_{i_j}, & v_{j-1} > v_j \end{cases}$$

Las secuencias distinguidas se pueden ver como subpalabras de $s_1, \dots, s_n$, equivalentemente es una palabra en $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \cdot\}$ tal su prod. sea u

Ejemplo: $n=3$, $u = s_1$, $w = w_0 = s_1 s_2 s_1$.

$$\{s_1, s_2, \cdot\} \quad \begin{array}{cc} s_1 & s_2 s_1 \\ s_1 s_2 & s_2 \end{array}$$

$$(\cdot, \cdot, s_1), (s_1, \cdot, \cdot)$$

$$(e, e, e, s_1) \quad (e, s_1, s_1, s_1)$$

✓ disting. X no disting.

$$\Rightarrow \mathcal{Q}_u^{ow} = \mathcal{P}_{\text{seq}}(e, e, e, s_1) = \mathcal{P}(\cdot, \cdot, s_1)$$

$(v^0, v^1, \dots, v^a)$, denotamos:

* $J =$, Consiste en los j tales que $v^j \supseteq v^{j-1}$

* $J \uparrow$, " " " " $v^{j-1} \subsetneq v^j$

* $J \downarrow$, " " " " $v^{j-1} \supsetneq v^j$

$$* |J| = m = |J \uparrow| + |J \downarrow|, \quad |J \uparrow| = m_{\uparrow}, \quad |J \downarrow| = m_{\downarrow}$$

Si $(V^0, \dots, V^a)$ es distinguida de $(S_{i_1}, \dots, S_{i_a})$ para u
 $\Rightarrow \mathcal{P}_{\text{sec}}(V^0, \dots, V^a) \cong (\mathbb{G}_m)^{m_{\downarrow}} \times \mathbb{A}^{m_{\downarrow}}$

Toro de Deadhar:

Como $\underbrace{\dot{R}^w_u}_{\text{irred.}} = \bigsqcup \mathcal{P}_{\text{sec}}(\underbrace{V^0, \dots, V^{a-1}}_u)$, entonces

existe una pieza de Deadhar densa que además cumple:

$$\begin{aligned} * \text{ dimensión} &= l(w) - l(u) \\ * \mathcal{M}_{\downarrow} &= \emptyset \quad \checkmark \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} V^{\hat{j}} = V^{\hat{j}-1}, V^{\hat{j}} S_{i_j} > V^{\hat{j}} \\ V^{\hat{0}} = V^{\hat{0}-1} S_{i_j}, V^{\hat{j}-1} \leq V^{\hat{j}} \end{array} \right.$$

A esta pieza se le denomina el toro de Deadhar

Producto de matrices para $\mathcal{P}_{\text{sec}}$:

$$* \dot{S}_i := P_i \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$* \dot{Z}_i(t) = P_i \left(\begin{bmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$* \ddot{Z}_i(t) = P_i \left(\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$* Y_i(t) = P_i \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \right) = \left[\begin{array}{c} \downarrow i \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ t \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}, 1 \end{array} \right]$$

Sea $(S_{i_1}, \dots, S_{i_a})$ tal que $w = S_{i_1} * \dots * S_{i_a}$ y $(V^0, \dots, V^a)$ una secuencia distinguida.

$$\begin{array}{c}
 \left(\underbrace{\left(\overset{(M=)}{\mathbb{G}_M} \times \overset{(M\downarrow)}{\mathbb{A}} \right)}_{\substack{\text{invertibles} \\ \text{Cualquiera}}} \right), \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{M_{\downarrow} \text{ veces}} \right)
 \end{array}$$

$M = \text{veces}$
 $M_{\downarrow} \text{ veces}$

Sea $(t_1, \dots, t_a) \in \mathbb{A}^a$ tal que:

$$\begin{cases}
 t_j \in \mathbb{G}_M & , \text{ si } j \in J_{=} \\
 t_j = 0 & , \text{ si } j \in J_{\uparrow} \\
 t_j \in \mathbb{A}' & , \text{ si } j \in J_{\downarrow}
 \end{cases}$$

Conj. de posibles valores de $t = \underbrace{\mathbb{G}_M^{M=} \times \mathbb{A}^{M_{\downarrow}}}_{\text{Cualquiera}} \cong \mathcal{P}_{\text{sec}}^{(v_1^0, \dots, v_a^0)}$

Definimos:

$$\underline{u_j} = \begin{cases} \frac{y_{ij}(t_j)}{\dot{s}_{ij}} & ; j \in J_{=} \\ \dot{z}_{ij}(u_j) & ; j \in J_{\uparrow} \\ \dot{z}_{ij}(u_j) & ; j \in J_{\downarrow} \end{cases}$$

$$(s_1, \dots, s_a), (h_1, \dots, h_a) \in GL_2 | B_+(2)$$

$$M_{i_1, \dots, i_a} : (GL_2 | B_+(2))^a \rightarrow BS^0(i_1, \dots, i_a)$$

$$(h_1, \dots, h_a) \mapsto (B_+, p_{i_1}(h_1) B_+, \dots, p_{i_1}(h_1) \dots p_{i_a}(h_a) B_+)$$

Definimos $g^K = h_1 \dots h_K$,

$$\mathbb{G}_m^{M=} \times \mathbb{A}^{M_{\downarrow}} \rightarrow (GL_2 | B_+(2))^a \rightarrow BS^0(i_1, \dots, i_a)$$

$$(h_1, \dots, h_a) \mapsto (B_+, g^1 B_+, g^2 B_+, \dots, g^a B_+)$$

Prop: la asignación anterior define un isomorfismo

$$\mathbb{G}_m^{M=} \times \mathbb{A}^{M_{\downarrow}} \cong \mathcal{P}_{\text{seq}}(V^0, V^1, \dots, V^a)$$

Ejemplo: En Jl_3 consideremos (s_1, s_2, s_1) . Tenemos dos sec. distinguidas que terminan en e

$$(e, e, e), (e, \overset{\downarrow}{s_1}, \overset{\downarrow}{s_1}, e)$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ J_- = \{1, 2, 3\}, J_{\uparrow} = \emptyset = J_{\downarrow} \end{array} \quad \begin{array}{c} \updownarrow \\ J_- = \{2\}, J_{\uparrow} = \{1\}, J_{\downarrow} = \{3\} \end{array}$$

Para (e, e, e, e) :

$$h_1 = Y_1(t_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark \begin{pmatrix} B_+ & & & \\ & / & & \\ & & / & \\ & & & / \end{pmatrix}$$

$$h_2 = Y_2(t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t_2 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$h_3 = Y_1(t_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Positividad total en $\mathring{R}_\mu^w$:

Definimos:

$$\mathring{R}_\mu^{w, \geq 0} = \mathring{R}_\mu^w(\mathbb{R}) \cap \text{Fl}_n^{\geq 0}$$

Teorema: Sea $\mu \preceq w$, entonces $\mathring{R}_\mu^{w, \geq 0} \cong \mathbb{R}_{\geq 0}^{l(w)-l(\mu)}$ ✓

Más precisamente, si $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ reducida de w y $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ el toro de Deodhar en $\mathring{R}_\mu^w$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0})^{l(w)-l(\mu)}$$

Entonces, $\mathring{R}_\mu^{w, \geq 0}$ es una componente conexa de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Más aun, $\mathring{R}_\mu^{w, \geq 0}$ está formado donde los $t_j > 0$, $\forall j \in J =$

Ejemplo: Consideremos $\mathring{R}_{123}^{(321)}$ en $\text{Fl}_3 \subseteq \text{Gr}(1, \mathbb{R}^3) \times \text{Gr}(2, \mathbb{R}^3)$

Los puntos en $\mathring{R}_{123}^{321, \geq 0}$ son de la forma:

$$(\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3), (\Delta_{12} : \Delta_{13} : \Delta_{23})$$

tales que $\Delta_I > 0$.

Para 321, hay 2 palabras reducidas:

$$s_1 s_2 s_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1+t_3 & 1 & 0 \\ t_2+t_3 & t_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S_2 S_1 S_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 1 & 0 \\ \mu_1 \mu_2 & \mu_1 + \mu_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 1 \end{bmatrix}$$

* Si $(t_1, t_2, t_3), (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 \neq 0$
las imágenes son $\neq$.

* Si $(t_1, t_2, t_3), (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \underbrace{\mathbb{R}^3}_{>0}$
las imágenes son iguales

Entonces $\underbrace{\mathbb{R}^3_{w_i \geq 0}}_{\mathbb{R}_M}$ no depende de la palabra
reducida