

Célula unipotente :

Consideremos $\mu = e \rightsquigarrow \overset{\circ}{X}_e \cong \mathbb{A}^{\binom{n}{2}} \quad [\dim \overset{\circ}{X}_w = \binom{n}{2} - l(w)]$

Identificamos:

$$U_- \rightarrow \overset{\circ}{X}_e$$

$$\mu \mapsto \mu B_+$$

Además, tenemos:

$$\overset{\circ}{X}_e^{\geq 0} = \bigsqcup_{w \in S_n} \overset{\circ}{R}_e^{w, \geq 0} = \overset{\circ}{R}_e^w(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathbb{F}\ell}_n^{\geq 0} \quad \checkmark$$

Consideremos $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ palabra reducida de w . Como $\mu = e$ tenemos $J_\uparrow = \emptyset$. Y también $J_\downarrow = \emptyset$.

Por el teorema anterior (5.4), tenemos que

$$\mathbb{R}_{>0}^a \rightarrow \overset{\circ}{R}_{(e)}^{w, \geq 0} \quad (\text{isomorfismo})$$

$$(t_1, \dots, t_a) \mapsto \underbrace{\gamma_{i_1}(t_1) \gamma_{i_2}(t_2) \dots \gamma_{i_a}(t_a)}_{\in U_-^{\geq 0}} B_+$$

Entonces, el mapa:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{>0}^a &\rightarrow U_- \\ (t_1, \dots, t_a) &\mapsto \gamma_{i_1}(t_1) \dots \gamma_{i_a}(t_a) \end{aligned} \quad \dots (*)$$

No depende de la elección de la palabra reducida de w .

Def : definimos $U^{w, \geq 0}$ como la imagen de $(*)$ la célula unipotente. (resp. a w).

Tenemos que $U_-^{w; \geq 0} \cong \mathbb{R}_{>0}^{l(w)}$ y

$$U_-^{\geq 0} = \bigcup_{w \in S_n} U_-^{w; \geq 0} \cong \mathbb{R}_{>0}^{l(w)}$$

($n=3$)

Ejemplo: Si $\mu = 213$, $w = 321$. Tenemos 2 palabras reducidas para w : (s_1, s_2, s_1) y (s_2, s_1, s_2)

Tenemos los mapas asociados a las matrices:

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -t_1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} /$$

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_3 & 1 \end{bmatrix} /$$

Si consideramos $\mu_1 = t_2$, $\mu_3 = t_1 t_2$, tenemos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ t_2 & t_1 t_2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -t_1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema: F una bandera TNN en $\hat{\mathcal{R}}_{\mu}^{w; \geq 0}$ y $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ palabra reducida de w . Sea $(F^0, \dots, F^a)$ la única secuencia de banderas en $BS^0(i_1, \dots, i_a)$ tal que $\underline{F^a} = F$, entonces todas las demás banderas F^i son TNN.

* Coord. de Plücker en $\hat{R}_\mu^{\omega; \geq 0}$.

Recordemos que si $J \subseteq [n]$, $|J| = k$:

* Si $J = \mu[k]$ ó $J = \omega[k] \Rightarrow \Delta_J \neq 0$ en $\hat{R}_\mu^\omega$

* Si no existe v tal que $\mu \leq v \leq \omega$ y $J = v[k]$

$\Rightarrow \Delta_J = 0$ en $\hat{R}_\mu^\omega$.

* Teorema: Sea $\mu \leq \omega$, $J \subseteq [n]$, $|J| = k$. Si existe v tal que $\mu \leq v \leq \omega$ con $J = v[k] \Rightarrow \Delta_J > 0$ en $\hat{R}_\mu^{\omega; \geq 0}$.
Caso contrario, $\Delta_J = 0$ en $\hat{R}_\mu^{\omega; \geq 0}$.

Fijemos $(s_{i_1}, \dots, s_{i_a})$ palabra reducida para ω y $\mu \leq \omega$.

Denotamos $\omega^j = s_{i_1} \dots s_{i_j}$ y $(v^0, \dots, v^a)$ la secuencia (positiva) definido recursivamente:

$$\begin{aligned} * v^a &= \mu \\ * v^{j-1} &= \begin{cases} v^j \overline{s_{i_j}} & , \quad v^j s_{i_j} < v^j \\ v^j & , \quad v^j s_{i_j} > v^j \end{cases} \end{aligned}$$

Denotamos $r_i = \begin{cases} e & , \quad j \in J = \\ \overline{s_{i_j}} & , \quad \overline{j \in J} \end{cases}$, podemos escribir
 $v^j = r_1 \dots r_j$

Para $j \in [a]$, definimos:

$$h_j = \begin{cases} y_{ij}(t_j), & j \in J = \\ \dot{s}_{ij} & , j \in J_{\uparrow} \end{cases}$$

Tenemos :

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^{J_{=}} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}_{\mu}^{\omega, \geq 0} \quad \text{isom.}$$

$$(t_j)_{j \in J_{=}} \mapsto (h_1 \dots h_a) \mathbb{B}_+$$

demo : $\forall 1 \leq j \leq a+1, J \subseteq [n]$, tenemos

$\Delta_J(n_j, n_{j+1}, \dots, n_a)$ es un polinomio en " t_i " con coeficientes no negativos.

Prueba: Por inducción reversa.

$j = a + 1$ is trivial.

Supongamos válido para " $j+1$ ". Definimos $g' = h_{j+1}h'_{j+2} \dots h_n$ y denotamos $i = i_j$.

* $j \in J_-$: tenemos $v_j v_{j+1} \dots v_a = Y_i(t_j) g^i$. Luego:

$$\Delta_J(v_i(t_j)g') = \begin{cases} t_j \Delta_{s_i J}(g') + \Delta_J(g'), & \text{Ind}\{i, i+1\} = \{1, n\} \\ \Delta_J(g'), & \text{caso contrario} \end{cases}$$

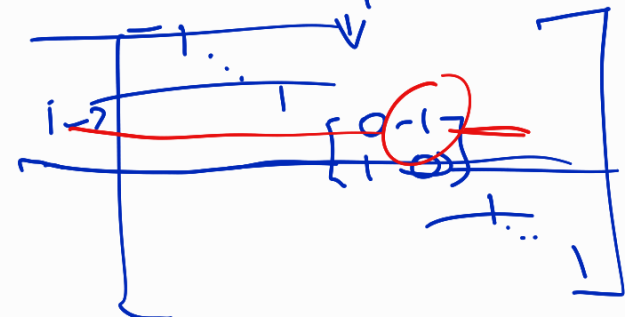
$$\sum_{k \in \binom{[n]}{|J|}} \Delta_{J,k}(Y_i(t_j)) \Delta_{k,[J]}(g')$$

Por inducción, $\Delta_J(\gamma_i(t_j) \cdot g')$ es un polinomio en los " t_i " con coef. no negativos.

* $j \in J_\uparrow$: tenemos $n_j n_{j+1} \dots n_a = \dot{s}_j g'$. Luego:

$$\Delta_J(\dot{s}_j g') = \begin{cases} \Delta_{\boxed{s_i J}}(g') \checkmark; & J \cap \{i, i+1\} = \{i+1\} \\ \boxed{-\Delta_{s_i \underline{J}}(g')} \checkmark; & J \cap \{i, i+1\} = \{i\} \\ \Delta_J(g') \checkmark; & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$\sum_{K \in \binom{[n]}{|J|}} \Delta_{J/K}(\dot{s}_j) \Delta_{K/[J]}(g')$



Si se cumple el 1º y el 3º caso, por inducción, tendríamos lo que queríamos. Faltaría el 2º.

Denotamos $|J| = k$, $w' = s_{i_{j+1}} s_{i_{j+2}} \dots s_a$.

$(n_{j+1} \dots n_a)$ $u' = \boxed{r_{j+1} \ r_{j+2} \ \dots \ r_a}$

Notemos $g' B_t$ está en $\mathbb{R}_{u'}^{w'}$ y por inducción las Coord. de Plücker son polinomios en " t_i " con coef. no neg.

Supongamos que $\Delta_{s_i J}(g') \neq 0$ (como polinomio)

para J con $i+1 \notin J$, $i \in J$. Luego, existe

$$v' \neq u' \quad u' \leq v' \leq w', \quad v'[k] = s_i J$$

Entonces: $i \in S; V'[k], i+1 \notin S; V'[k]$

$$\Rightarrow S; V' \leq V'$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{S; u'}} \leq S; V' \leq V' \leq \underline{\underline{\omega'}}$$

Entonces existe subpalabra reducida de $(S_{i+1}, \dots, S_a)$

Con producto $S; u'$. Esto contradice el hecho de que

$(v_j, \dots, v_a)$ sea la subpalabra más a la derecha

Con producto $S; u'$. Esto prueba lo que queríamos.

CW-Complejos y Positividad total

$$\mathring{R}_u^{w; \geq 0} = \mathring{R}_u^w(\mathbb{R}) \cap \text{Fl}_n^{\geq 0}. \text{ Tenemos una descomposición}$$

$$\underbrace{\downarrow \text{Fl}_n^{\geq 0}}_{\text{CW-complejo}} = \bigsqcup_{u, w} \underbrace{\mathring{R}_u^{w; \geq 0}}_{\cong \mathbb{R}_{>0}^{l(w) - l(u)}}$$

Teorema: $\text{Fl}_n^{\geq 0}$ es un CW-Complejo regular, donde $\mathring{R}_u^{w; \geq 0}$ son las células. Esto quiere decir

$$* \overline{\mathring{R}_u^{w; \geq 0}} = \bigcup_{u \leq u' \leq w' \leq w} \mathring{R}_{u'}^{w'; \geq 0}$$

$$* \left(\overline{\mathring{R}_u^{w; \geq 0}}, \mathring{R}_u^{w; \geq 0} \right) \underset{\text{Homeo}}{\cong} \left(\bar{B}[0,1], B(0,1) \right)$$

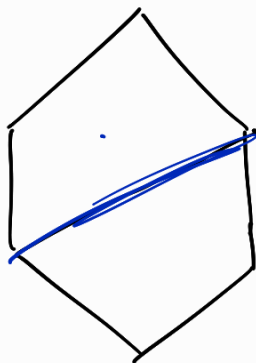
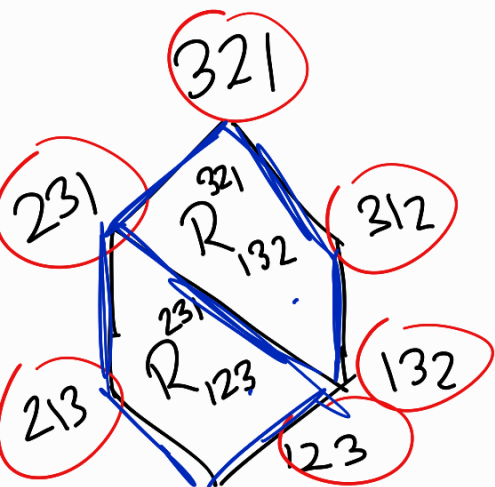
Ejemplo: $\text{Fl}_3^{\geq 0}$ tiene:

↓ célula de dimensión 3

4 " " " 2

8 " " " 1

6 " " " 0



Pegamos los hexágonos
a lo largo de su
borde $\sim$ esfera

* Caso unipotente ($u=e$)

Recordar: $U_-^{\geq 0} = \bigsqcup_{w \in S_n} U_-^{w, \geq 0}$

Intersectamos con el hiperplano H definido por

$$x_{21} + x_{32} + \dots + x_{n(n-1)} = 1$$

Pregunta ¿ $\{U_-^{w, \geq 0} \cap H\}$ forma un CW-descomp. de $U_-^{\geq 0} \cap H$.

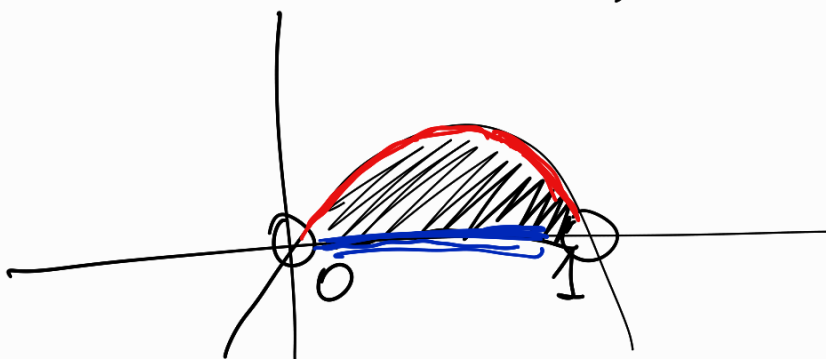
Si $w \neq e \Rightarrow U_-^{w, \geq 0} \cap H \cong \mathbb{R}_{>0}^{l(w)-1}$

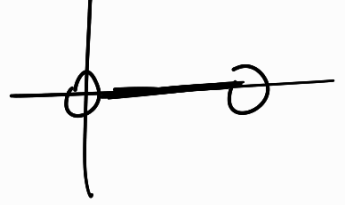
Ejemplo 8 $n=3$

$$U_-^{\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x \geq 0, z \geq 0 \\ xz \geq y \geq 0 \end{array} \right\}$$

$x+z=1$

$$\Rightarrow U_-^{\geq 0} \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & 1-x & 1 \end{pmatrix} \mid 0 \leq y \leq x(1-x) \right\}$$



$$U_{-}^{231; \geq 0} \approx \{y=0, 0 < x < 1\}$$


$$U_{-}^{231; \geq 0} \cap H \approx \{y = \underline{x(1-x)}, 0 < x < 1\}$$

$$(S_1, S_2) \quad \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow U_{-}$$

$$(t_1, t_2) \mapsto \psi_{\pm}(t_1) \psi_{\pm}(t_2)$$

Positividad total en banderas parciales:

Sean $0 < k_1 < \dots < k_r < n$ y $F_{k_1} \subseteq \dots \subseteq F_{k_r}$ banderas tal que $\dim(F_{k_i}) = k_i$. Diremos que esta bandera es TNN (Lustzig) si se puede encajar en

$$\boxed{F_1 \subseteq \dots \subseteq F_{n-1} \text{ bandera TNN ("completa")}}$$

Ejemplo: Consideremos $V_1 \subseteq V_3$ bandera en $\mathbb{R}^4$.

Tenemos:

Las coord. de Plücker de V_1 : $[\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4]$

" " " " V_3 : $[\underline{\Delta_{123}} : \underline{\Delta_{124}} : \underline{\Delta_{134}} : \underline{\Delta_{234}}]$

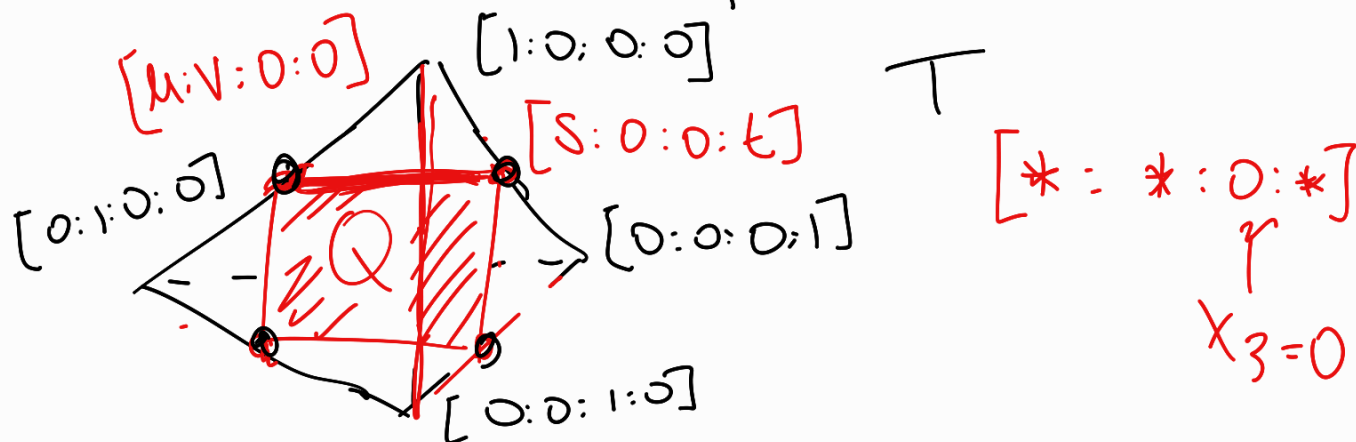
Supongamos que V_1, V_3 son TNN, i.e, todos las coord. de Plücker son ≥ 0 .

Relación de Plücker:

$$0 = \Delta_1 \Delta_{234} - \Delta_2 \Delta_{134} + \Delta_3 \Delta_{124} - \Delta_4 \Delta_{123}$$

$$V_1 \subseteq V_3 \text{ Son TNN (Lusztig's)} \Leftrightarrow \underbrace{\Delta_1 \Delta_{234} - \Delta_2 \Delta_{134}}_{V_1, V_3 \text{ Son TNN}} \geq 0$$

Consideremos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base (estándar) en $\mathbb{R}^4$ y x_1, x_2, x_3, x_4 sus coordenadas duales. Sea T el tetraedro en $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tales que $x_j \geq 0$, i.e, que tenga como vértices a los e_i .



V_1 TNN $\Rightarrow P(V_1)$ es un punto de T .

V_3 TNN $\Rightarrow P(V_3)$ corta a T en $\overline{e_1e_2}$, $\overline{e_2e_3}$, $\overline{e_4e_1}$, $\overline{e_3e_4}$

Sea Q el cuadrilátero que se obtiene al intersectar $P(V_3)$ con T . Los lados de Q son la int.

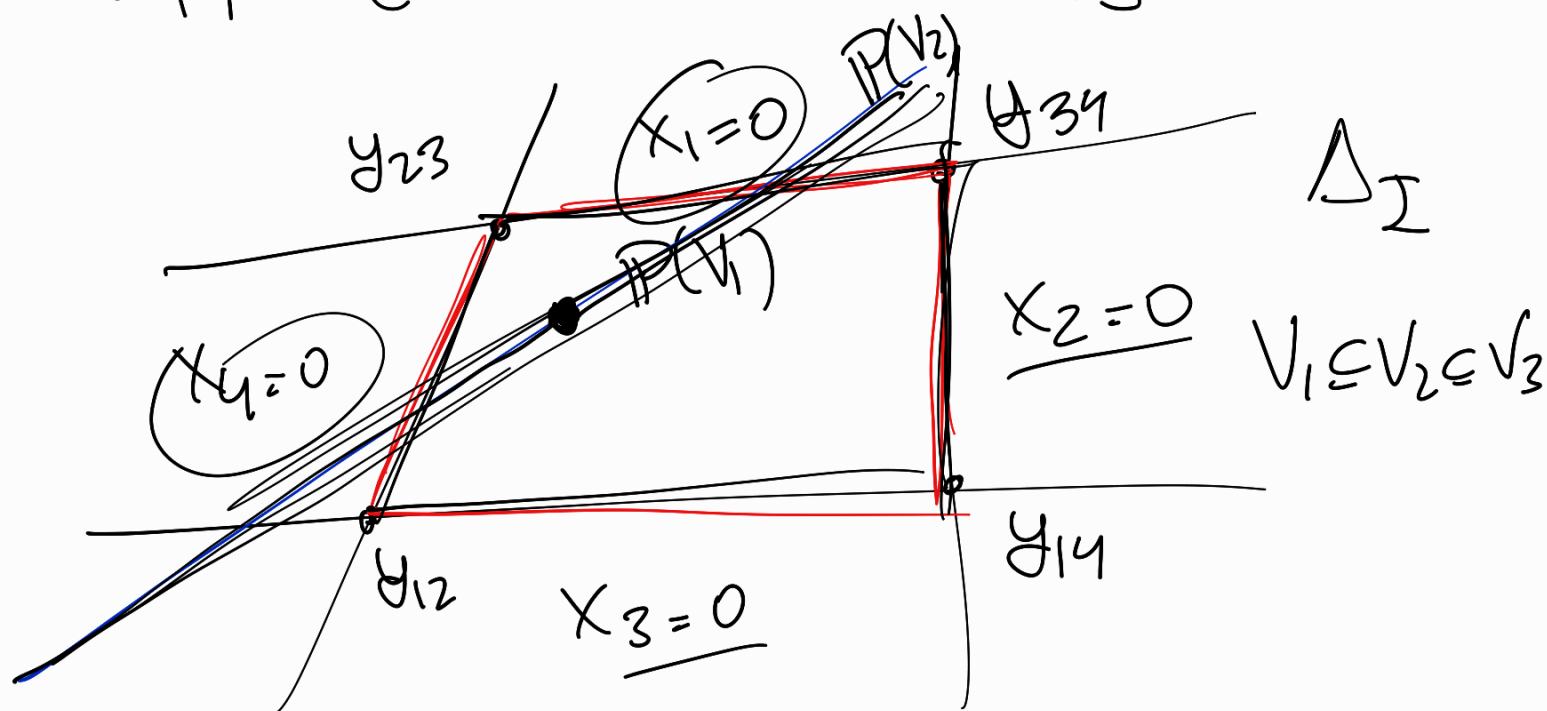
de $\{X_i = 0\}$ con $P(V_3)$, y sus vértices son

$$y_{12} = [\Delta_{134} : \Delta_{234} : 0 : 0]$$

$$y_{23} = [0 : \Delta_{124} : \Delta_{134} : 0]$$

$$y_{34} = [0 : 0 : \Delta_{123} : \Delta_{124}]$$

$$y_{14} = [\Delta_{123} : 0 : 0 : \Delta_{234}]$$



Recordar: $\prod_{\mu}^0 w$ Variedad de Richardson proyectada.

Podemos escoger μ, w tal

$$\pi : \tilde{R}_{\mu}^w \rightarrow \prod_{\mu}^0 w \quad \text{isomorfismo}$$

$$\text{Definimos: } \prod_{\mu}^0 w; \geq 0 = \pi(\tilde{R}_{\mu}^w; \geq 0) \cong \mathbb{R}_{>0}^{l(w)-l(\mu)}$$

Teorema : $\mathbb{A}^1(k_1, k_2, \dots, k_r; n) \neq \emptyset$ es un CW-complejo
 regular con células $\prod_{i=1}^r \omega_i \geq 0$ ✓