

Variedades Positroides

1. Teoría General

Recordemos

4

- En $\binom{[n]}{k}$, $\{i_1 < \dots < i_k\} \prec \{j_1 < \dots < j_k\}$, $i_1 \leq j_1$
- $u, w \in S_n$, $u \prec v$ (v cubre a u) si
 $u \preceq v$ y $l(v) = l(u) + 1$.

- Definimos, $\forall u, w \in S_n$, $u \preceq_K w \Leftrightarrow$
 - $\exists$ cadena $u = v_0 \prec v_1 \prec \dots \prec v_k = w$
 - $v_0[k] \preceq v_1[k] \preceq \dots \preceq v_k[k] \Leftarrow$

K-orden de Bruhat (orden K-Bruhat)

mathcal{Q}

- $\tilde{Q}(K, n) := \{(u, w) \in S_n \times S_n : u \preceq_K w\}$
- Ordenamos $(u_1, w_1) \preceq (u_2, w_2) \Leftrightarrow u_1 \preceq u_2 \preceq w_2 \preceq w_1$.
- Relación: $(u, w) \sim (u', w') \Leftrightarrow \exists x \in S_k \times S_{n-k}$
 con $u' = ux$ y $w' = wx$

$$Q(K, n) := \tilde{Q}(K, n) / \sim$$

- Ordenamos $\frac{[(u_1, w_1)]_{\sim}}{[(u_2, w_2)]_{\sim}} \Leftrightarrow$
 $\exists (u'_1, w'_1) \in [(u_1, w_1)]_{\sim}$
 $(u'_2, w'_2) \in [(u_2, w_2)]_{\sim}$
 $(u'_1, w'_1) \preceq (u'_2, w'_2)$

Obs En $\mathcal{Fln}(k_1, \dots, k_r)$, la prop 1.27 dice que proyecciones de Richardson pueden ser indexados por un par $(u, w) \in Q(K, n)$
 $u \preceq w$ y w mínima en wW_P

$$wW_P = w(S_{k_1} \times S_{k_2 - k_1} \times \dots \times S_{n - k_r})$$

En $\text{Gr}(K, n) \cong \mathbb{F}l_n(K)$ $(u, w) \in \tilde{Q}(K, n)$
 $u \preceq w$ y w mínima en $w(S_K \times S_{n-K})$

$W^P = \{w \text{ mínima en } w \in W^P\}$

$\mathbb{P}$ permutaciones K -Grassmannianas

w es K -Grassmanniana $\Leftrightarrow \begin{matrix} w(1) < \dots < w(K) \\ w(K+1) < \dots < w(n) \end{matrix}$

$Q(K, n)$ lo podemos identificar
 con el subcopo de $\tilde{Q}(K, n)$ donde
 $u \preceq w$ y $w \in W^P$, i.e. w es K -Grass.

$Q(K, n) = \{(u, w) \in S_n \times S_n : u \preceq w \text{ y } w \text{ } K\text{-Grass}\}$

Regresando

• La proyección $\pi: R_u^w \rightarrow \text{Gr}(K, n)$ es
 birracional a su imagen ssi $u \preceq_K w$; y la
 imagen depende sólo de $[(u, w)]_{\sim}$.

• La **var. positiva** Π_u^w es $\pi(R_u^w)$
 cuando $u \preceq_K w$, $(u, w) \in Q(K, n)$.

• La var. positiva abierta $\overset{\circ}{\Pi}_u^w$ es $\pi(\overset{\circ}{R}_u^w)$
 cuando $u \preceq_K w$.

Sabemos

$$\text{Gr}(K, n) = \bigsqcup_{(u, w) \in \underline{Q(K, n)}} \overset{\circ}{\Pi}_u^w \quad \text{y} \quad \Pi_u^w = \bigsqcup_{(u, w) \preceq (u', w')} \overset{\circ}{\Pi}_{u'}^{w'}$$

2. Permutaciones afines

• $\tilde{S}_n$ perm. afines: biyecciones $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(i+n) = f(i) + n$$

- Operación: composición
- Identidad: id en $\mathbb{Z}$
- Definimos homomorfismo de grupos
desp: $\tilde{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\text{desp}(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f(j) - j)$$

• $\forall k \in [n], \tilde{S}_n^k = \{f \in \tilde{S}_n : \text{desp}(f) = k\}$
Obs. $\tilde{S}_n^0 = \ker(\text{desp})$ y $\tilde{S}_n^k = \text{desp}^{-1}(\{k\})$
 $\Rightarrow \tilde{S}_n^0$ subgrupo normal de $\tilde{S}_n$
 $\tilde{S}_n^k$ son clases laterales

Obs. $\tilde{S}_n^0$ es un grupo de Coxeter afín
Generadores $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n$

$$\tilde{S}_i(j) = \begin{cases} j+1 & j \equiv i \pmod{n} \\ j-1 & j \equiv i+1 \pmod{n} \\ j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Diagrama:



i.e. $\tilde{S}_n^0$ es el Coxeter afín $\tilde{A}_{n-1}$

$\exists$ encaje $S_n (A_{n-1})$ en $\tilde{S}_n^0$ $s_i \mapsto \tilde{s}_i$

Esto induce orden en $\tilde{S}_n^0$

Queremos usar para ordenar $\tilde{S}_n^k$

$$\forall k \in [n] \text{ def } \varepsilon_i(k) = i+k$$

$$f, g \in \tilde{S}_n^k \quad f \preceq g \iff \underbrace{\varepsilon_k^{-1} f}_{\preceq} \underbrace{\varepsilon_k^{-1} g}_{\preceq}$$

Perm. afines acotadas

$\text{Bound}(k, n)$ son las perm. afines

$$f \in \tilde{S}_n^k \text{ y } i \leq f(i) \leq i+n$$

Ordenamos con el orden $\tilde{S}_n^k$ inducido por $\tilde{S}_n^0$.

$$w_k(i) = \begin{cases} i+n & i \equiv 1, \dots, k \pmod n \\ i & i \equiv k+1, \dots, n \pmod n \end{cases}$$

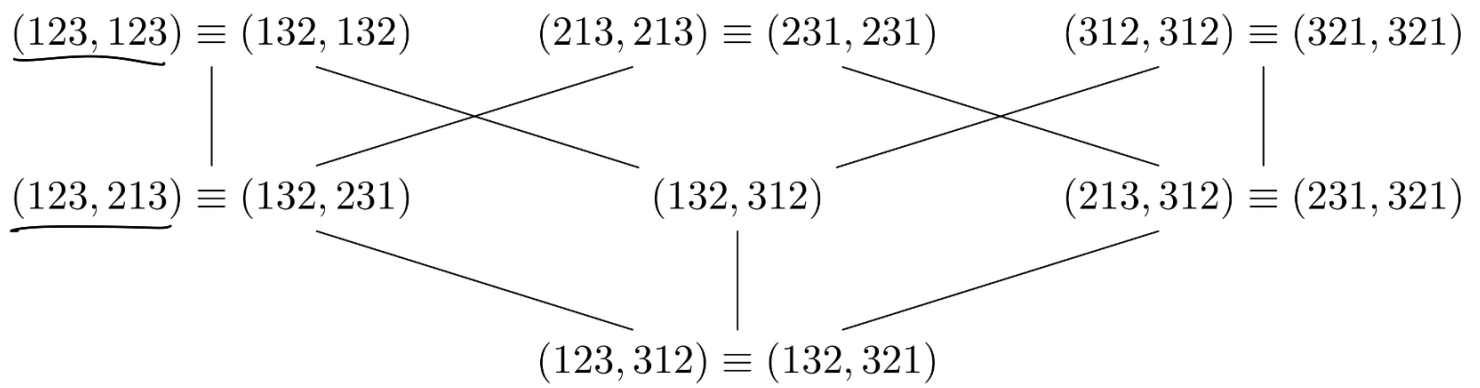
Prop (6.2 notas)

$$\begin{aligned} Q(k, n) &\rightarrow \text{Bound}(k, n) \\ (u, w) &\mapsto u w_k w^{-1} \end{aligned}$$

$\hookleftarrow$ isomorfismo de posets

$$\begin{aligned} \text{i.e. } (u_1, w_1) \sim (u_2, w_2) &\in Q(k, n) \\ u_1 w_k w_1^{-1} &= u_2 w_k w_2^{-1} \end{aligned}$$

$$E_n \quad Q(1, 3)$$



$$\text{Bound}(1, 3)$$

$$w_1(i) = \begin{cases} i+3 & i \equiv 1 \pmod{3} \\ i & i \equiv 2, 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$[b_1, b_2, \dots, b_n] \in \text{Bound}(K, n)$$

$$i + rn \mapsto b_{i+rn}$$

$$(123, 123) \mapsto [4, 2, 3]$$

$$1 \rightarrow (123) w_K(123)(1) = (123) w_K(1) = (123)(4) = 4$$

$$2 \rightarrow (123) w_K(123)(2) = 2$$

$$3 \rightarrow (123) w_K(123)(3) = 3$$

$$(123, 213) \mapsto [243]$$

$$1 \rightarrow (123)w_1(213)(1) = (123)w_1(2) = 2$$

$$2 \mapsto (123)w_1(213)(2) = 4$$

$$3 \mapsto (123)w_1(213)(3) = 3$$

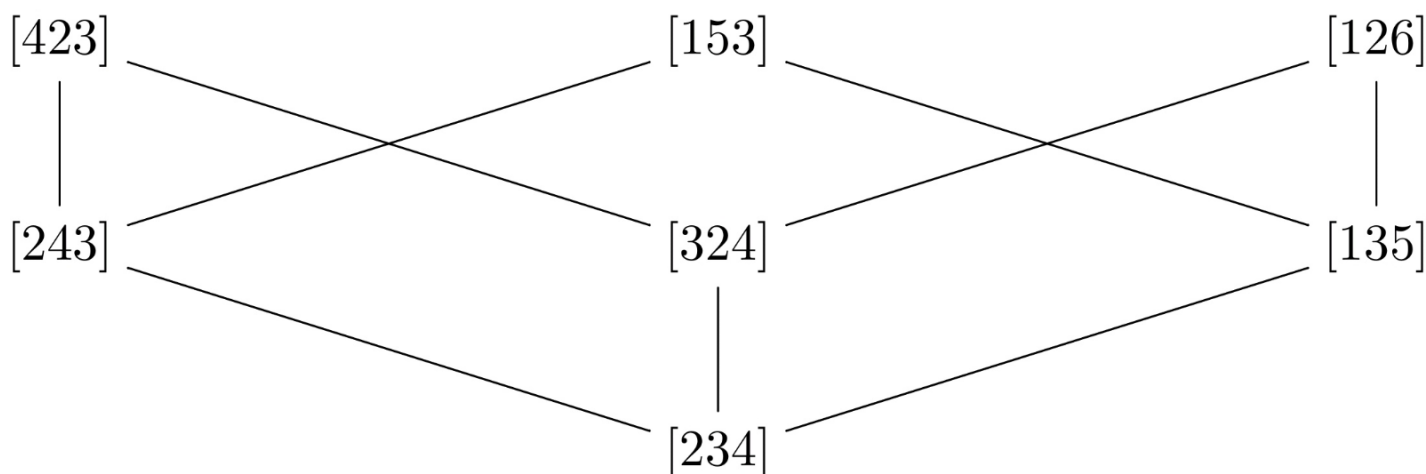
$$w_1(i) = \begin{cases} i+3 & i \equiv 1 \pmod{3} \\ i & i \equiv 2, 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$(123, 312) \mapsto [234]$$

$$1 \rightarrow (123)w_1(231)(1) = 2$$

$$2 \rightarrow (123)w_1(231)(2) = 3$$

$$3 \rightarrow (123)w_1(231)(3) = 4$$



$$[\text{Pos } 06] \quad \text{Perm. decoradas} \leftrightarrow \bigcup_{k=0}^n \underline{\text{Bound}(K, n)}$$

2. Matrices cíclicas de rango.

Recordando: mat. de rango son mat. $(n+1) \times (n+1)$
- orden de Bruhat en S_n

$$(Mw)_{ij} = \#([i] \cap w[j]) \quad w \in S_n$$

Def. $f \in \widetilde{S}_n^k$ def. la matriz de rango cíclica
 $\forall i, j \in \mathbb{Z}$

$$r_{ij}(f) = k - \# \{a < i : f(a) > j\}$$

Prop. $\forall f, g \in \widetilde{S}_n^k$, $f \leq g$ ssi $r_{ij}(f) \geq r_{ij}(g)$
 $\forall i, j \in \mathbb{Z}$

Caracterización:

Prop. 1. Si tenemos el arreglo $r_{ij}(f)$, $f \in \widetilde{S}_n^k$
recuperamos f como sigue.

$$f(i) = j \iff \underline{r_{ij}(f) = r_{(i+1)j}(f) = r_{i(j-1)}(f) = r_{(i+1)(j-1)}(f) + 1}$$

	i	i+1
j+1	x	x-1
j	x	x

Prop. 2 r_{ij} enteros $\forall i, j$. $r_{ij} = r_{ij}(f)$, $f \in \widetilde{S}_n^k$
 $\iff$

$$(1) \quad \forall (i, j) \quad \begin{array}{l} r_{ij} \leq r_{i(j+1)} \leq r_{ij} + 1 \quad \leftarrow \text{crece } \downarrow \text{ columna} \\ r_{ij} \leq r_{(i-1)j} \leq r_{ij} + 1 \quad \leftarrow \text{crece } \rightarrow \text{ renglones} \end{array}$$

$$(2) \quad r_{(i+n)(j+n)} = r_{ij}$$



$$(3) \quad \forall (i, j) \leq i \quad r_{ij} = r_{i(j+n)} = r_{(i-1)j} \\ \Rightarrow r_{(i-1)(j+n)} = r_{ij}$$

	$i-1$	i
j	$\times$	$\times$
$j+1$	$\times$	$\times$

$$(4) \quad \exists B \in \mathbb{Z} \quad \text{ta} \quad r_{ij} = j - i + 1 \quad j < i - B \\ r_{ij} = k \quad j > i + B$$

Prop 3. $f \in \tilde{S}_n^k$, $f \in \text{Bound}(k, n)$ ssi

$$(5) \quad r_{ij}(f) = 0 \quad j \leq i - 1 \quad -$$

$$(6) \quad r_{ij}(f) = k \quad j \geq i + n - 1 \quad -$$

llamamos a r_{ij} que cumpla (4) - (6)
 le llamamos matrices cíclicas de rango

Por props 1, 2, 3. $\text{Bound}(k, n) \leftrightarrow$ mat. cíclicas de rango

Por prop 3. basta con r_{ij} , $j \in [i-1, i+n-1]$

Ejemplo. $n=4$, $k=2$, $f = [1476]$

$$f(i) = \begin{cases} i & i \equiv 1 \pmod{4} \\ i+2 & i \equiv 2 \pmod{4} \\ i+4 & i \equiv 3 \pmod{4} \\ i+2 & i \equiv 4 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\text{desp}(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f(j) - j)$$

$$\text{desp}(f) = \frac{1}{4} (0 + 2 + 4 + 2) = 2 \Rightarrow f \in \tilde{S}_4^2$$

$$r_{ij}(f) \quad 1 \leq i, j \leq 8$$

$$r_{ij}(f) = 2 - \# \{a < i : f(a) > j\}$$

$$r_{11}(f) = 2 - 2 = 0$$

$$j \in [0, 4]$$

$$r_{12}(f) = 2 - 1 = 1$$

$$r_{10}(f) = 0$$

$$r_{14}(f) = 2$$

$$r_{13}(f) = 2 - 0 = 2$$

$$j < 0 \quad r_{ij}(f) = 0$$

$$r_{14}(f) = 2$$

$$j > 4 \quad r_{ij}(f) = 2$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	2	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2	2	2	2
4	2	2	2	2	2	2	2	2
5	2	2	2	2	2	2	2	2
6	2	2	2	2	2	2	2	2
7	2	2	2	2	2	2	2	2

Tec. $(u, w) \in Q(K, n)$, $f = u w, w^{-1} \in \tilde{S}_n^k$
 $L \in Gr(K, n)$, $i \leq j$

- $E \mid K$ -plano L esté en $\tilde{\Pi}_u^w$
 $\Leftrightarrow$ la proy. coordenada de L
sobre $\text{span}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_j)$
tiene dim. $r_{ij}(f)$.

El K -plano L está en Π_a^w
 $\Leftrightarrow$ la proy. coordenada de L
 sobre $\text{span}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_j)$
 tiene $\dim \leq r_{ij}(f)$

En resumen

• Saber la celda positroide de L
 es equiv. a saber la dim
 de proy. coordenada de L
 sobre $\text{span}(e_i, \dots, e_j) \quad i \leq j$

Ejemplo. $f = [14|76]$, $n=4$, $K=2$

M matriz 4×2 con renglones $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$

$L \in \text{Gr}(2, 4)$ con base $\vec{w}_1, \vec{w}_2$

$$\begin{matrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{matrix}$$

$$L = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$$

Extendemos $\vec{v}_i \bmod 4$
 $\vec{v}_0 = \vec{v}_4$

$$\vec{v}_{i+4r} = \vec{v}_i \quad \forall r \in \mathbb{Z}$$

$$L \rightarrow \text{span}(e_i)$$

$$\dim \text{span}(\vec{v}_i) = r_{i1}(f) = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = 0$$

$$L \rightarrow \text{span}(e_0, e_1, e_2)$$

$$\dim \text{span}(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = r_{02}(f) = 1$$

$\Rightarrow \vec{V}_0 = \vec{V}_4$ paralelo a $\vec{V}_2$

• L está en Π_u^w donde $\vec{V}_1 = 0$
 $\vec{V}_2 \parallel \vec{V}_4$

• L está en $\tilde{\Pi}_u^w$ donde $\vec{V}_2, \vec{V}_4 \neq 0$.

$Q(K, n) \leftrightarrow \text{Bound}(K, n) \leftrightarrow \text{Matr. cíclicas} \leftrightarrow \text{Grass. Neck.}$

clases de
equivalencia
o
pares de
permutaciones

permutaciones
afines
acotadas

Matrices
cíclicas
de rango

Collares
de Grassmann

(u, w)

$\neq$

r_{ij}

$(I_1, \dots, I_n)$

$$f = u \omega_k w^{-1}$$

$$r_{ij}(f) = k - \#\{a < i : f(a) > j\}$$

		i	$i+1$
$j-1$	$x+1$	x	
j	$x+1$	$x+1$	

4. Collares de Grassmann

$$f \in \tilde{\Sigma}_n^k \quad \begin{aligned} f(i+n) &= f(i) + n \\ \text{desp}(f) &= k \\ i \leq f(i) \leq i+n \end{aligned}$$

$$\text{Sea } r_{ij} = r_{ij}(f) \quad f \in \text{Bound}(k, n)$$

$$0 = r_{i(i-1)} \leq r_{ii} \leq \dots \leq r_{i(i+n-1)} = k$$

$$r_{ij} - r_{i(j-1)} \in \{0, 1\}$$

$$K = \# \{j \in [i-1, i+n-1] : r_{ij} > r_{i(j-1)}\}$$

$$\tilde{I}_i := \{j \in [i-1, i+n-1] : r_{ij} > r_{i(j-1)}\}$$

$$\tilde{I}_i \in \binom{[i-1, i+n-1]}{k}$$

$$f \in \text{Bound}(k, n) \rightarrow \{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad \text{fácil}$$

$$\{\tilde{I}_i\} \rightarrow r_{ij} \rightarrow f$$

$$\{\tilde{I}_i\} \rightarrow f$$

Prop. Si $\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ asociado a $f \in \text{Bound}(k, n)$ recuperamos f como sigue

- $i \notin \tilde{I}_i, f(i) = i$
- $i \in \tilde{I}_i, \tilde{I}_{i+n} = (\tilde{I}_i \setminus \{i\}) \cup \{f(i)\}$

Ejemplo.

$$\rightarrow \tilde{I}_1 = \{2, 3\}, \tilde{I}_2 = \{2, 3\}, \tilde{I}_3 = \{3, 4\}, \tilde{I}_4 = \{4, 7\}, \tilde{I}_5 = \{6, 7\}$$

$$f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 7, f(4) = 6$$

$$f = [1476]$$

Prop. Sea $\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de K -conjuntos n fijo.
 $\tilde{I}_i \subseteq \{i-1, \dots, i+n-1\}$

$$\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \leftrightarrow f \in \text{Bound}(K, n)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{I}_i \setminus \{i\} \subseteq \tilde{I}_{i+1}$$

$$i \in \tilde{I}_i \Rightarrow \tilde{I}_i \setminus \{i\} \subsetneq \tilde{I}_{i+1} \quad \leftarrow$$

$$i \notin \tilde{I}_i \Rightarrow \tilde{I}_i = \tilde{I}_{i+1}$$

Definimos

$I_i :=$ elementos de $\tilde{I}_i$ reducidos mod n

$$I_i \in \binom{[n]}{K}$$

$$\begin{array}{l} f(4) \equiv 2 \\ 4 \leq f(4) \leq 8 \end{array} \quad f(4) = 6$$

Ejemplo

$$f = [1476], \quad n=4, \quad K=2$$

$$I_1 = \{2, 3\}, \quad I_2 = \{2, 3\}, \quad I_3 = \{3, 4\}, \quad I_4 = \{3, 4\}$$

Prop. $(I_1, \dots, I_n) \in \binom{[n]}{K}$ correspondientes a $f \in \text{Bound}(K, n)$
 Los índices son módulo n .

$$\bullet \text{ Si } i \notin I_i, \quad f(i) = i$$

$$\bullet \text{ Si } i \in I_i \text{ y } I_{i+1} \neq I_i, \quad I_{i+1} = (I_i \setminus \{i\}) \cup \{c\}$$

$$c \in [n] \text{ y } f(i) \equiv c \quad i \leq f(i) \leq i+n$$

$$\bullet \text{ Si } i \in I_i \text{ y } I_{i+1} = I_i, \quad f(i) = i+n$$

Prop. $(I_1, \dots, I_n) \in \binom{[n]}{k}^n$

$(I_1, \dots, I_n)$ corresponde a $f \in \text{Bound}(K, n)$

$$\begin{aligned} I_i \setminus \{i\} &\subseteq I_{i+1} \quad \forall i \in [n-1] \\ I_n \setminus \{n\} &\subseteq I_1 \end{aligned} \iff$$

A las sec. $(I_1, \dots, I_n)$ que verifiquen
les llamamos **collares de Grassmann**

Obs. $L \in \text{Gr}(K, n)$

$$L \in \tilde{\Pi}_u^w \quad (u, w) \in Q(K, n)$$

$\tilde{\Pi}_u^w$ está asociada a un collar de Grassmann
Sec. $(I_1, \dots, I_n)$ tal collar de Grassmann.

I_i codifica los rangos r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}

$$L \in \tilde{X}_{I_i}$$

$$\rho: 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \dots \mapsto n \mapsto 1 \quad [n]$$

$$\sigma: e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto \dots \mapsto e_n \mapsto e_1 \quad \mathbb{A}^n$$

$$L \in \sigma^{j-1} \tilde{X}_{\rho^{j-1}(I_j)}$$

Esto es **conocer la celda positiva de L**
es equivalente a conocer las celdas de Schubert
en que caen los espacios $L, \sigma(L), \sigma^2(L), \dots, \sigma^{n-1}(L)$.

Obs. $\tilde{J}_j = \{i : r_{(i-1)j} = r_{ij} + 1\}$

$$\tilde{J}_j \subseteq \{j-n+1, \dots, j\}$$

$$J_j = \text{red. de } \tilde{J}_j \text{ mod } n$$

$(J_1, \dots, J_n)$ collares de Grassmann
reverso de f

$$J_j | \{ij\} \subseteq J_{j-1}$$

· codifican la celda opuesta de Schubert
resp. de $L, \sigma(L), \sigma^2(L), \dots, \sigma^{n-1}(L)$.