

Variedades Positroides

Mario A. Paz Gómez

Instituto de Matemáticas UNAM

Resumen

Las variedades positroides son proyecciones de variedades de Richardson en la variedad Grassmanniana $\text{Gr}(k, n)$. El término “positroide” se atribuye a Postnikov [Pos06], quien estudió la estructura de la Grassmanniana totalmente no negativa $\text{Gr}(k, n)^{\geq 0}$. Si bien estudiar proyecciones de variedades de Richardson en toda generalidad puede ser complicado, las variedades positroides admiten descripciones combinatorias particularmente manejables que permiten analizarlas de manera efectiva.

■ Índice

1 Lo que sabemos de la teoría general

2 Permutaciones afines

3 Matrices cíclicas de rango

4 Collares de Grassmann

Las variedades positroides son subvariedades de la Grassmanniana $\text{Gr}(k, n)$ que reciben su nombre por su relación con matroides realizables cuyas matrices asociadas son totalmente no negativas, lo que induce una noción de positividad en el contexto de matroides.

Más aún, las variedades positroides coinciden con las proyecciones de ciertas variedades de Richardson indexadas por pares de permutaciones en S_n . En la literatura es común estudiar estas variedades sin hacer referencia directa a su definición en términos de matroides y, en su lugar, optar por definir las como proyecciones de variedades de Richardson.

En estas notas seguiremos esta perspectiva y presentaremos tres modelos combinatorios equivalentes que describen y parametrizan las variedades positroides de $\text{Gr}(k, n)$.

1. Lo que sabemos de la teoría general

Recordemos:

- Para cualquier par de k -subconjuntos de $[n]$ escribimos $\{i_1 < i_2 < \dots < i_k\} \prec \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ si $i_\ell \leq j_\ell$ para cada $\ell \in [k]$.
- Si $u, v \in S_n$, decimos que $u \leq v$ (v **cubre** a u) si $u \prec v$ (en el orden de Bruhat) y $\ell(v) = \ell(u) + 1$.

Definimos un orden parcial en S_n como sigue: para cualquier par $u, w \in S_n$ decimos que $u \leq_k w$ si y sólo si existe una cadena $u = v_0 \prec v_1 \prec \dots \prec v_\ell = w$ con $v_0[k] \prec v_1[k] \prec \dots \prec v_\ell[k]$. A este orden le llamamos el **orden k -Bruhat** en S_n .

- $\hat{\mathcal{Q}}(k, n)$ denota el conjunto de parejas ordenadas $(u, w) \in S_n \times S_n$ tales que $u \leq_k w$.
- Definimos en $\hat{\mathcal{Q}}(k, n)$ un orden parcial $\preceq$ dado por $(u, w) \preceq (u', w')$ si y sólo si $u \leq u' \leq w' \leq w$.
- La relación $\sim$ en $\hat{\mathcal{Q}}(k, n)$, dada por $(u, w) \sim (u', w')$ si y sólo si existe un $x \in S_k \times S_{n-k}$ de tal modo que $u' = ux$ y $w' = wx$, es una relación de equivalencia.
- Definimos $\mathcal{Q}(k, n) := \hat{\mathcal{Q}}(k, n) / \sim$.
- Ordenamos $\mathcal{Q}(k, n)$ parcialmente diciendo que $[(u_1, w_1)] \sim \preceq [(u_2, w_2)] \sim$ si y sólo si existen $(u'_1, w'_1) \in [(u_1, w_1)] \sim$ y $(u'_2, w'_2) \in [(u_2, w_2)] \sim$ tales que $(u'_1, w'_1) \preceq (u'_2, w'_2)$ ($u'_1 \leq u'_2 \leq w'_2 \leq w'_1$).

Observación. En vista de [Spe24, Proposition 1.27], las proyecciones de las variedades de Richardson de la variedad de banderas $\mathcal{F}\ell_n(k_1, \dots, k_p)$ pueden ser indexadas por los pares

$(u, w) \in S_n \times S_n$ con $u \leq w$ y $w \in W^P$, donde W^P es el conjunto de los w tales que w es mínima en la clase lateral wW_P , (recordemos que $W_P = S_{k_1} \times S_{k_2 - k_1} \times \dots \times S_{n - k_p}$). En particular, para el caso de la Grassmanniana se sigue que $W_P = S_k \times S_{n-k}$, por lo que W^P consiste en las llamadas permutaciones k -Grassmannianas. Tales permutaciones pueden ser descritas más concretamente como aquellas que cuyo único descenso es en la k -ésima posición.

$\mathcal{Q}(k, n)$ se puede identificar con el subcopo de $\hat{\mathcal{Q}}(k, n)$ que consiste de todos los pares (u, w) donde w es mínima en la clase lateral $w(S_k \times S_{n-k})$, es decir, son exactamente los pares $(u, w) \in \hat{\mathcal{Q}}(k, n)$ con w siendo una permutación k -Grassmanniana.

La proyección $\pi : R_u^w \rightarrow \text{Gr}(k, n)$ es birracional sobre su imagen si y sólo si $u \leq_k w$, y su imagen depende sólo de la clase de equivalencia $[(u, w)] \sim$. A la proyección de la variedad de Richardson R_u^w en este caso le llamamos la **variedad positroide** Π_u^w . Similarmente, la **variedad positroide abierta** $\mathring{\Pi}_u^w$ es la proyección de la variedad abierta de Richardson $\mathring{R}_u^w$ cuando $u \leq_k w$. Tenemos que

$$\text{Gr}(k, n) = \bigsqcup_{(u, w) \in \mathcal{Q}(k, n)} \mathring{\Pi}_u^w \quad \text{y} \quad \Pi_u^w = \bigsqcup_{(u', w') \succeq (u, w)} \mathring{\Pi}_{u'}^{w'}. \quad (1)$$

2. Permutaciones afines

El **grupo simétrico afín** $\tilde{S}_n$ es el grupo consistente de las biyecciones $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tales que $f(i + n) = f(i) + n$, con la operación dada por composición. Definimos el homomorfismo desp : $\tilde{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ definido por

$$\text{desp}(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f(j) - j). \quad (2)$$

Para un $f \in \tilde{S}_n$ definimos el **desplazamiento** de f como $\text{desp}(f)$. Para cada $k \in [n]$ denotamos

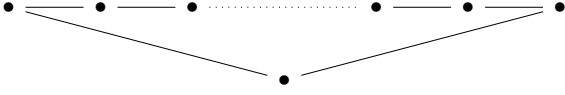
$$\tilde{S}_n^k := \{f \in \tilde{S}_n : \text{desp}(f) = k\}.$$

En particular, $\tilde{S}_n^0 = \ker(\text{desp})$ y $\tilde{S}_n^k = \text{desp}^{-1}[\{k\}]$, por lo que $\tilde{S}_n^0$ es un subgrupo normal de $\tilde{S}_n$ y $\tilde{S}_n^k$ son clases laterales de $\tilde{S}_n$.

Podemos describir $\tilde{S}_n^0$ como un grupo de Coxeter con generadores $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n$ definidos por

$$\tilde{s}_i(j) = \begin{cases} j+1 & \text{si } j \equiv i \pmod{n}, \\ j-1 & \text{si } j \equiv i+1 \pmod{n}, \\ j & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3)$$

Así, la gráfica de Coxeter es



Esto es, $\tilde{S}_n^0$ es el grupo afín de Coxeter de tipo $\tilde{A}_{n-1}$. Hay un encaje de S_n (el grupo de Coxeter de tipo A_{n-1}) en $\tilde{S}_n$ definido por $s_i \mapsto \tilde{s}_i$.

Observación. El grupo de Coxeter de tipo $\tilde{A}_{n-1}$ es de rango n , y no $n-1$. Se obtiene de aplicar la construcción que nos da un grupo de Coxeter afín a A_{n-1} .

Ahora definimos $\zeta_k(i) := i+k$, para pasar del orden de Bruhat en $\tilde{S}_n^0$ a un orden parcial en $\tilde{S}_n^k$, definiendo que $f \preceq g$ en $\tilde{S}_n^k$ si y sólo si $\zeta^{-1}f \preceq \zeta^{-1}g$ en el orden de Bruhat en $\tilde{S}_n^0$. Decimos que $f \in \tilde{S}_n^k$ es una **permutación afín acotada** si $i \leq f(i) \leq i+n$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. Al subcopo de permutaciones afines acotadas de $\tilde{S}_n^k$ con el orden inducido por el orden de $\tilde{S}_n^0$ le denotamos $\text{Bound}(k, n)$.

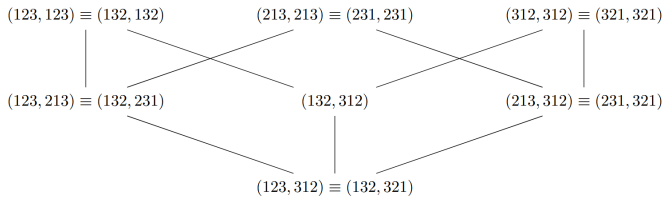
Sea $\omega_k \in \tilde{S}_n$ definida por

$$\omega_k = \begin{cases} i+n & \text{si } i \equiv 1, 2, \dots, k, \\ i & \text{si } i \equiv k+1, k+2, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

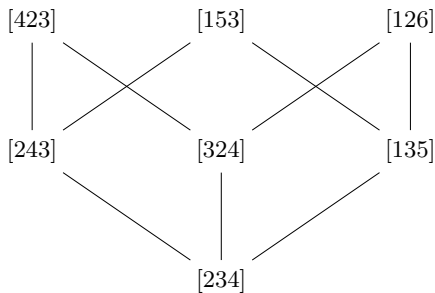
Proposición 1. La asignación $(u, w) \mapsto u\omega_k w^{-1}$ define un isomorfismo de copos de $\mathcal{Q}(k, n)$ a $\text{Bound}(k, n)$. Si $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in \hat{\mathcal{Q}}(k, n)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia en $\mathcal{Q}(k, n)$, entonces $u_1\omega_k w_1^{-1} = u_2\omega_k w_2^{-1}$. Más aún, este mapeo $\mathcal{Q}(k, n) \rightarrow \tilde{S}_n^k$ es un isomorfismo de copos sobre su imagen.

Demostración. Ver [KLS13, Theorem 3.16]. $\square$

Veamos el diagrama de Hasse de $\mathcal{Q}(1, 3)$ con los pares equivalentes agrupados.



Veamos, por otro lado, el diagrama de Hasse para los elementos correspondientes en $\tilde{S}_3^1$. Denotamos $[b_1 b_2 \dots b_n]$ para la permutación afín dada por $i + rn \mapsto b_i + rn$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $r \in \mathbb{Z}$.



Observación. Originalmente, Postnikov [Pos06] considera permutaciones “decoradas”: una subcolección de S_n en la cual se colorean los puntos fijos con -1 o $+1$. Hay una biyección sencilla entre estas permutaciones y el conjunto de permutaciones afines $\bigsqcup_{k=0}^n \text{Bound}(k, n)$. En el trabajo de Postnikov se considera un parámetro extra llamado “anti excedencias”, el cual coincide con

k en nuestro caso. En [KLS13], los autores enfocan esta información con permutaciones afines, por lo cual no consideramos las permutaciones decoradas para estas notas.

3. Matrices cíclicas de rango

En la primer sección de la clase se introdujeron las matrices de rango: matrices de $(n+1) \times (n+1)$ que describen el orden de Bruhat en S_n , cuyas entradas son las cardinalidades $\#([i] \cap w[j])$ para cada $w \in S_n$. Concretamente, la **matriz de rango** de $w \in S_n$ es la matriz dada por $r(w)_{ij} = \#([i] \cap w[j])$ y, por convención, $r(w)_{0j} = r(w)_{i0} = 0$. Como consecuencia, siempre tenemos que $r(w)_{kn} = r(w)_{nk} = k$ para $0 \leq k \leq n$. Por ejemplo, la matriz de rango de $w = s_1 s_2 s_3 = [2341] \in S_4$ es

$$r(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

De manera similar, ahora presentamos un modelo combinatorio para el orden de Bruhat en $\tilde{S}_n$ atribuido a Björner y Brenti [BB06] que se relaciona con la geometría de la variedad Grassmanniana, con dicha conexión establecida por Knutson, Lam y Speyer [KLS13].

Sea f una permutación afín de desplazamiento k , i.e. $f \in \tilde{S}_n^k$. Para cualesquiera $i, j \in \mathbb{Z}$ definimos

$$r_{ij}(f) = k - \#\{a < i : f(a) > j\}. \quad (6)$$

Proposición 2. Para cualesquiera $f, g \in \tilde{S}_n^k$, $f \preceq g$ si y sólo si $r_{ij}(f) \geq r_{ij}(g)$ para cualesquiera i, j .

Demostración. Ver [BB06, Theorem 8.3.7]. $\square$

Lo siguiente que haremos es caracterizar los arreglos r_{ij} de permutaciones afines en algún $\tilde{S}_n^k$ para relacionar estos arreglos con las permutaciones afines acotadas $\text{Bound}(k, n)$. Los siguientes resultados con sus demostraciones a detalles están en [KLS13, Section 3].

Proposición 3. Si tenemos el arreglo $r_{ij}(f)$ para algún $f \in \tilde{S}_n^k$, podemos recuperar la permutación afín haciendo $f(i) = j$ si y sólo si $r_{ij}(f) = r_{(i+1)j}(f) = r_{i(j-1)}(f) = r_{(i+1)(j-1)}(f) + 1$.

Proposición 4. Dado un arreglo r_{ij} , este es $r_{ij}(f)$ para alguna permutación afín $f \in \tilde{S}_n^k$ si y sólo si

- (1) Para cada (i, j) tenemos que $r_{ij} \leq r_{i(j+1)} \leq r_{ij} + 1$ y $r_{ij} \leq r_{(i-1)j} \leq r_{ij} + 1$.
- (2) Se sigue que $r_{(i+n)(j+n)} = r_{ij}$.
- (3) Para todo (i, j) , si $r_{ij} = r_{i(j+1)} = r_{(i-1)j}$, entonces $r_{(i-1)(j+1)} = r_{ij}$.
- (4) Existe un entero B tal que $r_{ij} = j - i + 1$ para $j < i - B$ y $r_{ij} = k$ para $j > i + B$.

Proposición 5. Sea $f \in \tilde{S}_n^k$. Luego $f \in \text{Bound}(k, n)$ si y sólo si

- (5) $r_{ij}(f) = 0$ para $j \leq i - 1$, y
- (6) $r_{ij}(f) = k$ para $j \geq i + n - 1$.

Llamamos a un arreglo que cumpla (1) - (6) una **matriz cíclica de rango**. Con esto, las proposiciones 3, 4 y 5 nos dicen que $\text{Bound}(k, n)$ está en biyección con las matrices cíclicas de rango. Más aún, por la proposición 5, al escribir una matriz cíclica de rango basta sólo con las entradas $r_{ij}(f)$ con $j \in [i-1, i+n-1]$, por lo que la primer entrada de cada columna será 0, mientras que la última entrada será k .

Ejemplo 6. Veamos un ejemplo con $n = 4$. Consideremos la permutación afín $f := [1476]$. Esto es, para cada $i \in \mathbb{Z}$,

$$f(i) = \begin{cases} i & i \equiv 1 \pmod{4}, \\ i+2 & i \equiv 2 \pmod{4}, \\ i+4 & i \equiv 3 \pmod{4}, \\ i+2 & i \equiv 4 \pmod{4}. \end{cases} \quad (7)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{desp}(f) &= \frac{1}{4}((f(1) - 1) + (f(2) - 2) + (f(3) - 3) + (f(4) - 4)) \\ &= \frac{1}{4}(0 + 2 + 4 + 2) \\ &= 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Es decir, $f \in \tilde{S}_n^k$ con $n = 4$ y $k = 2$. Veamos como se ve el arreglo $r_{ij}(f)$ para $1 \leq i, j \leq 8$. Aquí, i indexa las columnas de izquierda a derecha y j indexa los renglones de arriba a abajo.

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & & & \\ 2 & 2 & 1 & 0 & & & & \\ 2 & \boxed{2} & 2 & 1 & 0 & & & \\ 2 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} & 0 & & \\ 2 & 2 & 2 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & \\ 2 & 2 & \boxed{2} & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \boxed{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Las entradas coloreadas de azul corresponden a las entradas $r_{ij}(f)$ con $j \in [i-1, i+n-1]$ (es decir, aquellas entradas que caracterizan al arreglo). El resto, coloreadas en rojo, son aquellas que no son necesarias (esto incluye las entradas igual a 0 que, por facilidad, no son escritas en este ejemplo). Las entradas en cajas son las entradas $(f(i), i)$, correspondientes a la permutación afín f . De acuerdo con la proposición 3, el valor de la entrada (i, j) es entonces el número de cajas en el subarreglo obtenido de considerar las entradas que están estrictamente a la izquierda o debajo de (i, j) (es decir, las entradas (i', j') con $i' > i$ y $j' < j$).

Teorema 7. Sea $(u, w) \in \mathcal{Q}(k, n)$ y sea $f = u\omega_k w^{-1} \in \tilde{S}_n^k$ la permutación afín correspondiente. Sea L un k -plano en $\text{Gr}(k, n)$. Dados $i \leq j$, consideramos los índices $i, i+1, \dots, j$ módulo n .

- El plano L está en Π_u^w si y sólo si, para cualesquiera $i \leq j$, la proyección coordenada de L sobre $\text{span}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_j)$ tiene dimensión $r_{ij}(f)$.
- El plano L está en Π_u^w si y sólo si, para cualesquiera $i \leq j$, la proyección coordenada de L sobre $\text{span}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_j)$ tiene dimensión $\leq r_{ij}(f)$.

Demostración. Ver [KLS13, Theorem 5.1]. $\square$

Este teorema es la justificación para la definición de $r_{ij}(f)$. En resumen, **saber en que celda positroide está L es equivalente a saber la dimensión de la proyección coordenada de L sobre $\text{span}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_j)$ para todo par $i \leq j$** , con los índices tomados módulo n .

Ejemplo 8. Volvamos al ejemplo 6: tenemos $n = 4$, $k = 2$ y $f = [1476]$. Consideremos una matriz M de 4×2 con renglones $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$, y sea L el 2-plano de $\text{Gr}(k, n)$ generado por las columnas de M . Extendemos la notación $\vec{v}_i$ de forma que sea periódica en i módulo 4 (es decir, $\vec{v}_i = \vec{v}_{i+4r}$ para cada $r \in \mathbb{Z}$). De acuerdo con el teorema 7, en la respectiva celda positroide debe de seguirse que $\dim \text{Span}(\vec{v}_1) = r_{11}(f) = 0$ (por lo que $\vec{v}_1 = 0$), y $\dim \text{Span}(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = r_{02}(f) = 1$, (por lo que $\vec{v}_0$ es paralelo a $\vec{v}_2$). La variedad positroide Π en este caso es justo la que cumple

que $\vec{v}_1 = 0$ y $\vec{v}_0 \parallel \vec{v}_2$, mientras que la variedad positroide abierta Π es aquella donde se verifican estas mismas condiciones y, más aún, $\vec{v}_0, \vec{v}_2 \neq 0$.

4. Collares de Grassmann

Sea r_{ij} la matriz cíclica de rango de una permutación afín en $\text{Bound}(k, n)$. Fijando una columna i , tenemos que $0 = r_{i(i-1)} \leq r_{ii} \leq r_{i(i+1)} \leq \dots \leq r_{i(i+n-1)} = k$ y que $r_{ij} - r_{i(j-1)} \in \{0, 1\}$ para cada j . Luego,

$$k = \#\{j \in [i, i+n-1] : r_{ij} > r_{i(j-1)}\}. \quad (10)$$

Denotaremos $\tilde{I}_i := \{j \in [i, i+n-1] : r_{ij} > r_{i(j-1)}\}$.

Dado una $f \in \text{Bound}(k, n)$ conocemos el conjunto $\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. También es posible hacer el proceso inverso utilizando los $\tilde{I}_i$ para reconstruir el arreglo r_{ij} y obtener f . Sin embargo, es posible obtener f directamente de los $\tilde{I}_i$ sin (aparentemente) utilizar r_{ij} y es de hecho sencillo:

Proposición 9. Si $\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es el conjunto asociado a una permutación afín $f \in \text{Bound}(k, n)$ entonces:

- Si $i \notin \tilde{I}_i$, $f(i) = i$.
- Si $i \in \tilde{I}_i$, $\tilde{I}_{i+1} = (\tilde{I}_i \setminus \{i\}) \cup \{f(i)\}$.

Ejemplo 10. Supongamos que

$$\tilde{I}_1 = \{2, 3\}, \quad \tilde{I}_2 = \{2, 3\}, \quad \tilde{I}_3 = \{3, 4\}, \quad \tilde{I}_4 = \{4, 7\}. \quad (11)$$

Estos son parte del conjunto $\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ para cierto $f \in \text{Bound}(k, n)$ ¿Son suficientes para recuperar el f ?

Sabemos que

- $1 \in \tilde{I}_1$, así que $f(1) = 1$.
- $2 \in \tilde{I}_2$ y $\tilde{I}_3 = (\tilde{I}_2 \setminus \{2\}) \cup \{4\}$, entonces $f(2) = 4$.
- $3 \in \tilde{I}_3$ y $\tilde{I}_4 = (\tilde{I}_3 \setminus \{3\}) \cup \{7\}$, entonces $f(3) = 7$.

Sin embargo, la proposición 9 no es suficiente sin conocer $\tilde{I}_5$. Supongamos, adicionalmente, que $\tilde{I}_5 = \{6, 7\}$. En este caso obtenemos que $f(4) = 6$. Es decir, $f = [1476]$, la permutación afín que venimos siguiendo desde ejemplos anteriores. Nótese que $\tilde{I}_5$ es igual a $\tilde{I}_1$ salvo módulo 4.

Proposición 11. Sea $\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una colección de k -conjuntos de enteros con $\tilde{I}_i \subseteq \{i, i+1, \dots, i+n-1\}$. La colección $\{\tilde{I}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ corresponde a una permutación afín acotada si y sólo si $\tilde{I}_i \setminus \{i\} \subseteq \tilde{I}_{i+1}$.

La razón para la notación con tilde $\tilde{I}_i$ es que nos interesa guardar la notación I_i para otros conjuntos: para cada $i \in \mathbb{Z}$ definimos $I_i \subseteq [n]$ como el conjunto de elementos de $\tilde{I}_i$ reducidos módulo n .

Ejemplo 12. Siguiendo el ejemplo anterior con $f = [1467]$,

$$I_1 = \{2, 3\}, \quad I_2 = \{2, 3\}, \quad I_3 = \{3, 4\}, \quad I_4 = \{3, 4\}. \quad (12)$$

Podemos recuperar los $\tilde{I}_i$ de los I_i . Más aún, podemos recuperar el $f \in \text{Bound}(k, n)$ directamente de los I_i . Las siguientes proposiciones son consecuencias directas de las proposiciones 9 y 11 haciendo la traducción de los $\tilde{I}$ a los I_i .

Proposición 13. Sea $(I_1, \dots, I_n) \in \binom{[n]}{k}^n$ correspondiente a una permutación afín acotada f . Aquí, los índices se consideran módulo n .

- Si $i \notin I_i$, entonces $f(i) = i$.
- Si $i \in I_i$ y $i \neq I_{i+1}$, entonces $I_{i+1} = (I_i \setminus \{i\}) \cup \{c\}$ para algún $c \in [n]$. En este caso, $f(i) \equiv c$ con $i \leq f(i) \leq i+n$.
- Si $i \in I_i$ y $I_i = I_{i+1}$, entonces $f(i) = i+n$.

Proposición 14. Sea $(I_1, \dots, I_n) \in \binom{[n]}{k}^n$. $(I_1, \dots, I_n)$ corresponde a una permutación afín en $\text{Bound}(k, n)$ si y sólo si $I_i \setminus \{i\} \subseteq I_{i+1}$ para toda $i \in [n-1]$ y $I_n \setminus \{n\} \subseteq I_1$.

A las secuencias $(I_1, \dots, I_n)$ que verifiquen las condiciones de la proposición 14 les llamamos **collares de Grassmann**. De acuerdo con esta proposición, los collares de Grassman también están en biyección con las permutaciones afines acotadas.

Sea $L \in \text{Gr}(k, n)$. Hay una única variedad positroide abierta $\tilde{\Pi}$ correspondiente a L . $\tilde{\Pi}$ está asociada a un par $(u, w) \in \mathcal{Q}(k, n)$ y, por lo tanto, a un collar de Grassmann $(I_1, \dots, I_n)$. I_1 codifica los rangos $r_{11}, r_{12}, r_{13}, \dots$, de donde podemos deducir que L está en la celda de Schubert $\tilde{X}_{I_1}$. Más generalmente, si ρ es la permutación $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \dots \mapsto n \mapsto 1$ en $[n]$ y σ es el automorfismo $e_1 \mapsto e_2 \mapsto \dots \mapsto e_n \mapsto e_1$ en $\mathbb{A}^n$, entonces L está en la celda de Schubert $\sigma^{j-1} \tilde{X}_{\rho^{j-1}(I_j)}$.

En resumen, **conocer en que celda positroide está L es equivalente a saber las celdas de Schubert en las que están los espacios $L, \sigma(L), \sigma^2(L), \dots, \sigma^{n-1}(L)$.**

Observación. Podemos hacer un proceso análogo leyendo $r_{ij}(f)$ por filas en lugar de columnas. Para esto definimos los conjuntos $\tilde{J}_j := \{i : r_{(i-1)j}(f) = r_{ij}(f) + 1\}$. Luego, $\tilde{J}_j \subseteq \{j-n+1, j-n+2, \dots, j\}$; definimos J_j como la reducción de $\tilde{J}_j$ módulo n . A la secuencia $(J_1, \dots, J_n)$ le llamamos el **collar de Grassmann reverso** de f . Estos cumplen que $J_j \setminus \{j\} \subseteq J_{j-1}$ y codifican en que celda opuesta de Schubert están los espacios $L, \sigma(L), \dots, \sigma^{n-1}(L)$.

■ Referencias

- [BB06] A. Bjorner y F. Brenti. *Combinatorics of Coxeter Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 9783540275961. URL: <https://books.google.com.mx/books?id=1TBPz5sd8m0C>.
- [Pos06] Alexander Postnikov. *Total positivity, Grassmannians, and networks*. 2006. arXiv: [math/0609764](https://arxiv.org/abs/math/0609764) [math.CO]. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0609764>.
- [KLS13] Allen Knutson, Thomas Lam y David E. Speyer. «Positroid varieties: juggling and geometry». En: *Compositio Mathematica* 149.10 (2013), págs. 1710-1752. DOI: 10.1112/S0010437X13007240.
- [Spe24] David E Speyer. *Richardson varieties, projected Richardson varieties and positroid varieties*. 2024. arXiv: 2303.04831 [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/2303.04831>.