

Algunas variedades y sus estructuras de conglomero.

- Var. Grassmanniana $Gr(K, n)$ Scott 06
- Var. de banderas $Fl(n)$ Geiss-Leclerc-Schroer 06 simplemente enlazado
Kadhem 22
- Var. Positroides Π_u^w Galashin-Lam 19
- Var. de Richardson $\tilde{R}_u^w$ Leclerc 16 simplemente enlazado
Serhigenko-Shermann-Bennett 22 tipo A
- Var. de trenzas $X(\beta)$ Galashin-Lam-Sherman-Bennet 23
Casals-Gorsky-Gorsky-Le-Shen-Simental 24
- Var. de Richardson $\tilde{R}_u^w$ ↑
- Var. positroides Skew shaped Gorsky-Kim-Scroggin-Simental 25

Skew shaped positroids

Fijamos $0 < k < n$.

Una **partición** es una tupla de enteros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ donde $n - k \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.

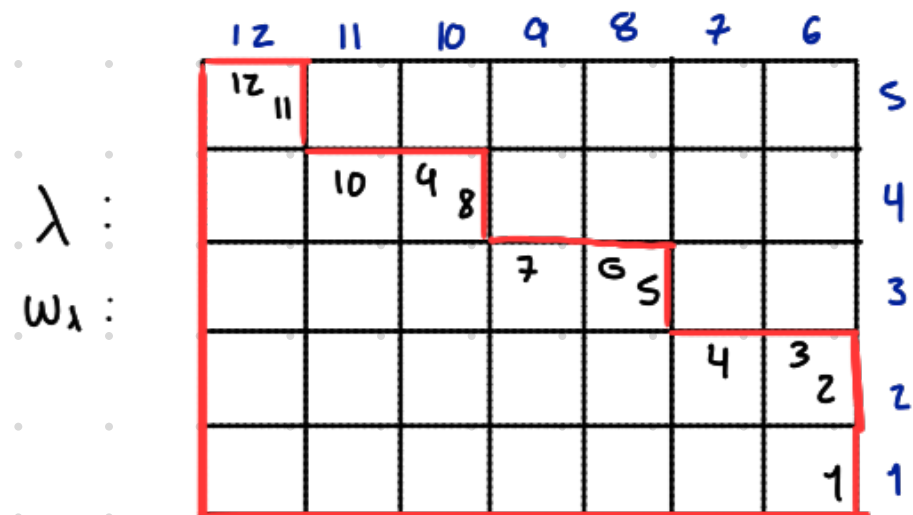
A cada partición λ asociamos una permutación k -Grassmaniana

$$w_\lambda = [n - k + 1 - \lambda_1, \dots, n - \lambda_k, 1 + \bar{\lambda}_1, 2 + \bar{\lambda}_2, \dots, n - k + \bar{\lambda}_{n-k}]$$

Dibujamos los diag. de Young **abajo a la izquierda**. $\bar{\lambda}_a$ es la altura de col. a ($\leftarrow$).

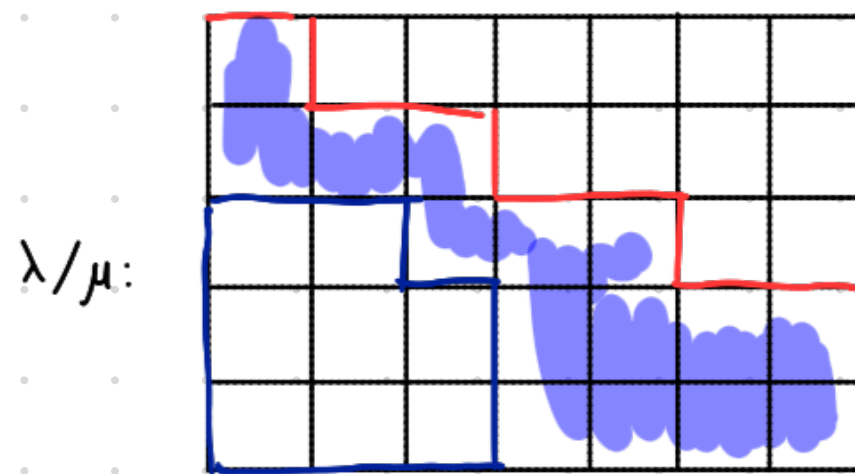
Dados λ, μ particiones, el **skew diagram** λ/μ es la "resta de λ y μ ".

$n = 12$ $k = 5$ $n - k = 12$
 $\lambda = (7, 7, 5, 3, 1)$ $\mu = (3, 3, 2)$



$$w_\lambda = [1, 2, 5, 8, 11, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12]$$

$$\mu \leq \lambda \quad \mu_i \leq \lambda_i \quad \forall i \in [k]$$



$$\mu = (3, 3, 2, 0, 0) \\ = (3, 3, 2)$$

Skew shaped positroids

- $GL(n)$ - Mat. de $n \times n$ complejas invertibles
- $B_+(n)$ - Mat. triang. superiores
- $B_-(n)$ - Mat. triang. inferiores

Definimos la **positroide (abierto)**
"skew shaped" $S_{\lambda/\mu}^\circ$ como

$$(B_+(n) w_\mu B_+(n) / B_+(n)) \cap (B_-(n) w_\lambda B_-(n) / B_-(n))$$

- $S_{\lambda/\mu}^\circ$ es subvar. de $Fl(n) = GL(n) / B_+(n)$

- Por def., $S_{\lambda/\mu}^\circ = \dot{R}_{w_\lambda}^{w_\mu}$.

$$\mu \leq \lambda \quad w_\lambda \leq w_\mu$$

- $w_\lambda \leq w_\mu$ y son K -Grassmannianas
así que $\dot{R}_{w_\lambda}^{w_\mu} \cong \dot{R}_{w_\lambda}^{w_\mu}$.

- Podemos considerar $S_{\lambda/\mu}^\circ$ como
subvariedad Grassmanniana.

- Dada una permutación K -Grassmanniana
podemos recuperar una partición λ
tal que $w_\lambda = w$.

- Están en biyección

$$\left\{ (u, w) \text{ con } u \leq w \atop u, w \text{ } K\text{-Grass} \right\} \longleftrightarrow \left\{ (\lambda, \mu) \text{ con } \mu \leq \lambda \atop n - k \geq \lambda, \mu \right\}$$

Skew shaped posroids

• Etiquetado

$\square_{a,i}$ es el i -ésimo cuadrado ($\uparrow$) de la a -ésima columna. ($\leftarrow$)

$$\square_{a,i} \in \lambda/\mu \Leftrightarrow \bar{\mu}_a < i \leq \bar{\lambda}_a$$

Definimos $I'(a,i) \in \binom{[n]}{k}$:

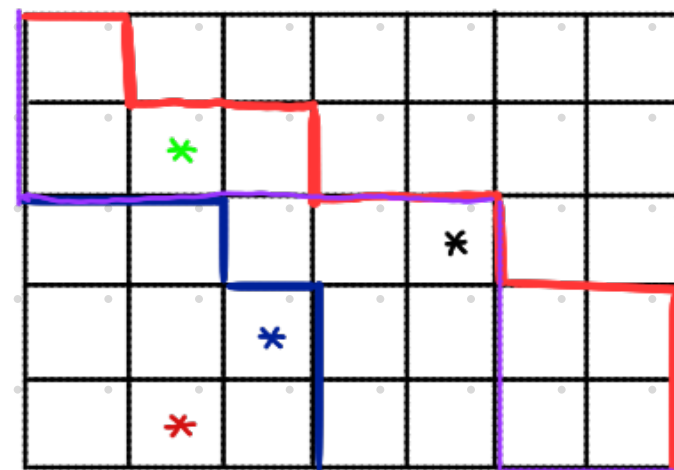
- $\forall \square_{a,i} \in \lambda/\mu$, $\mu_{a,i}$ es el mínimo diag. de Young con $\square_{a,i} \in \mu_{a,i}$ y $\mu \leq \mu_{a,i}$

- Asociamos a $\mu_{a,i}$ su camino de frontera $P_{a,i}$, comenzando abajo a la derecha y terminando arriba a la izquierda.

- $I'(a,i)$ es el cto. de pasos verticales.

$n=12$ $k=5$
 $\lambda = (7, 7, 5, 3, 1)$

$n-k=12$
 $\mu = (3, 3, 2)$



- * $I'(3,3) = \{3, 4, 5, 11, 12\}$
- * $I'(5,2) = \{5, 6, 8, 11, 12\}$
- * $I'(6,1) = \{5, 6, 8, 11, 12\}$
- * $I'(6,4) = \{5, 6, 8, 9, 12\}$

$$R(\lambda) = \{\square_{a,i} \in \lambda/\mu : \text{arriba a la derecha no hay cuadros}\}$$

$$I_\mu = I'(a,i) \text{ cuando } \square_{a,i} \in \mu$$

Skew shaped positroids

Collares de Grassmann

$\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_n) \in \binom{[n]}{k}^n$ con:

- $i \in I_i \Rightarrow I_{i-1} = (I_i \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ para algún $j \in [n]$.
- $i \notin I_i \Rightarrow I_i = I_{i-1}$.

De un skew diagram λ/μ obtenemos

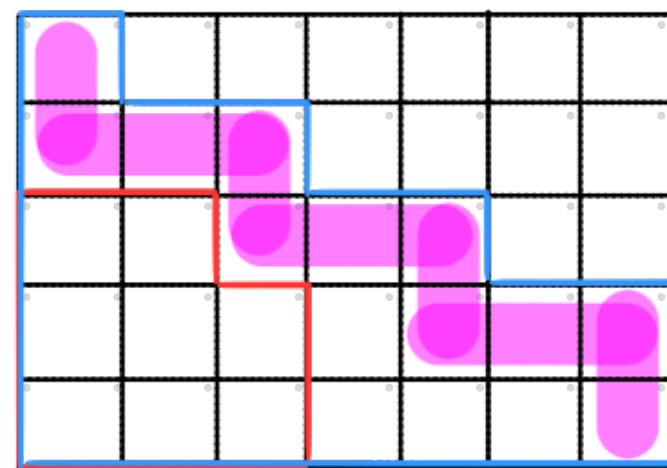
un collar de Grassmann $\mathcal{I}_{\lambda/\mu} = (I_1, \dots, I_n)$:

- Si $\lambda_1 < n-k$, $I_1 = \dots = I_{n-k-\lambda_1} = I_\mu$
- $\forall a, i \in R(\lambda)$, $I_{i+a-1} = I'(a, i)$.
- Si $\bar{\lambda}_{n-k} < k$, ent. $I_{n-k+\bar{\lambda}_{n-k}} = \dots = I_{n-1} = I_\mu$
- $I_n = I_\mu$.

★ $\mathcal{S}_{\lambda/\mu}^\circ \cong \Pi_{\mathcal{I}_{\lambda/\mu}}^\circ$

$n=12$ $k=5$
 $\lambda = (7, 7, 5, 3, 1)$

$n-k=7$
 $\mu = (3, 3, 2)$



 $R(\lambda)$

$I_1 = \{1, 6, 8, 11, 12\}$

$I_2 = \{1, 2, 8, 11, 12\}$

$I_3 = \{2, 3, 8, 11, 12\}$

$I_4 =$

$I_5 =$

$I_6 =$

$I_7 =$

$I_8 =$

$I_9 =$

$I_{10} =$

$I_{11} =$

$I_{12} =$

• $i \leq f(i) \leq i+n$ Skew shaped positroids

★ $S_{\lambda/\mu}^{\circ} \cong \Pi_{\mathcal{X}_{\lambda/\mu}}^{\circ}$

• Al skew diagram λ/μ le asociamos una permutación afín acotada $f_{\lambda/\mu}$:

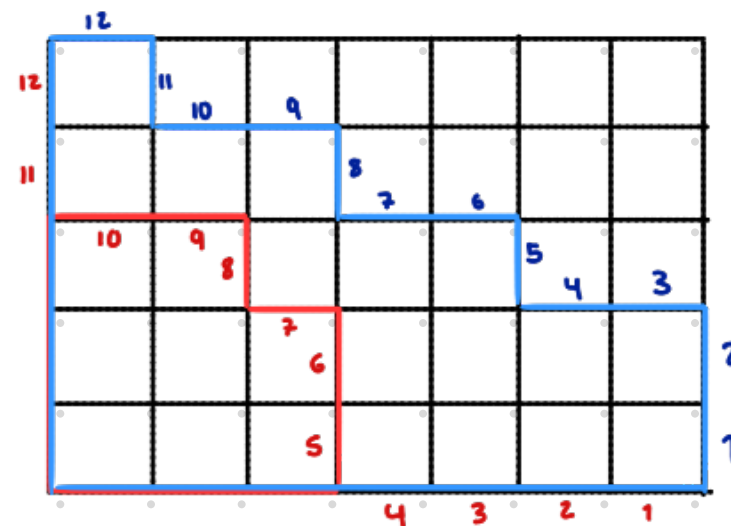
• Si i es un paso horizontal de P_{μ} , dibujamos una flecha hacia arriba hasta dar con P_{λ} en el paso j y hacemos $f_{\lambda/\mu}(i) = j$.

• Si i es un paso vertical de P_{μ} hacemos una flecha hacia la derecha hasta dar con P_{λ} en el paso j y hacemos $f_{\lambda/\mu}(i) = j+n$.

• $f_{\lambda/\mu} = w_{\lambda} w_{\kappa} w_{\mu}^{-1}$, $w_{\kappa} = [1+n, \dots, \kappa+n, \kappa+1, \dots, n]$

● $n=12$ $\kappa=5$
 $\lambda = (7, 7, 5, 3, 1)$

$n-\kappa=12$
 $\mu = (3, 3, 2)$



$f(1) = 3$	$f(5) = 1+12$
$f(2) = 4$	$f(6) = 2+12$
$f(3) = 6$	$f(8) = 5+12$
$f(4) = 7$	$f(11) = 8+12$
$f(7) = 9$	$f(12) = 11+12$
$f(9) = 10$	
$f(10) = 12$	

Skew shaped positroids

$$\star S_{\lambda/\mu}^{\circ} \cong \Pi_{\mathcal{I}_{\lambda/\mu}}^{\circ}$$

$$\cdot \text{ Por def., } S_{\lambda/\mu}^{\circ} = \dot{R}_{w_{\lambda}}^{w_{\mu}}$$

$$\cdot w_{\mu} \text{ es } K\text{-Grass.} \Rightarrow \dot{R}_{w_{\lambda}}^{w_{\mu}} \cong \dot{\Pi}_{w_{\lambda}}^{w_{\mu}}$$

$$\cdot \dot{\Pi}_{w_{\lambda}}^{w_{\mu}} = \dot{\Pi}_{f_{\lambda/\mu}} \text{ donde } f_{\lambda/\mu} = w_{\lambda} w_{\kappa} w_{\mu}^{-1}$$

$$\cdot f_{\lambda/\mu} = f_{\mathcal{I}_{\lambda/\mu}} \Rightarrow \dot{\Pi}_{f_{\lambda/\mu}} = \dot{\Pi}_{\mathcal{I}_{\lambda/\mu}}$$

$$\cdot S_{\lambda/\mu}^{\circ} \cong \dot{\Pi}_{\mathcal{I}_{\lambda/\mu}} \quad \square$$

Skew shaped positroids

Estructura de conglomerado

Semilla

Variables: Para cada $\square_{a,i} \in \lambda/\mu$ tenemos una variable $x_{a,i} := \Delta_{I^-(a,i)}$.

Si $\square_{a,i} \in R(\lambda)$, $x_{a,i}$ es congelada, y mutable en otro caso.

Carcaj: Tenemos un vértice por cada $x_{a,i}$. Hay 3 tipos de flechas:

$\square_{a,i} \rightarrow \square_{a+1,i}$
"izquierda"

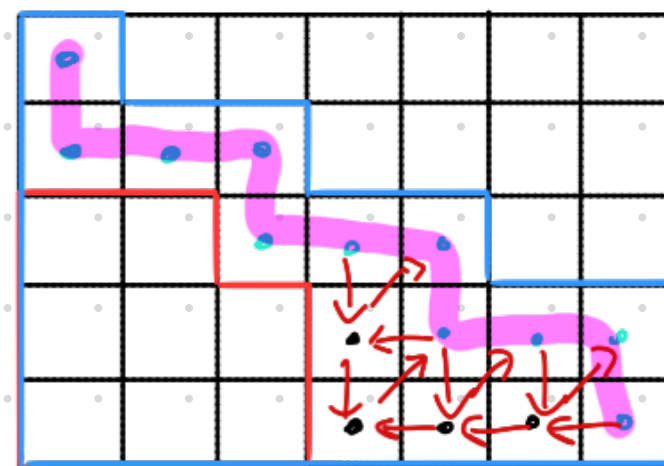
$\square_{a,i} \rightarrow \square_{a,i+1}$
"abajo"

$\square_{a,i} \rightarrow \square_{a-1,i+1}$
"diagonal ↗"

cuando al menos un extremo es mutable.

$n = 12$ $k = 5$
 $\lambda = (7, 7, 5, 3, 1)$

$n - k = 7$
 $\mu = (3, 3, 2)$



● $R(\lambda)$
● congeladas
● mutables

• Esto da una estructura de conglomerado en $\mathbb{C}[S_{\lambda/\mu}]$.

• Con $\mu = (0, \dots, 0)$
 $\lambda = (n-k, \dots, n-k)$
recuperamos (casi toda)
la semilla de rect. de $Gr(k, n)$.

Var. de Richardson Grassmannianas

$P_+(k, n)$

- P_+ - Mat. de $GL(n)$ triang. superior por bloques de tamaño k o $(n-k)$

$Gr(k, n) = GL(n) / P_+$

$w \in S_n$

- la celda e Schubert es $B_+(n)wP_+/P_+$.
- la celda op. de Schubert es $B_-(n)wP_+/P_+$.

Si $w_\lambda \leq w_\mu$ son k -Grassmannianas la var. de Richardson Grassmanniana es

$$GR_{\lambda/\mu}^\circ = GR_{w_\lambda}^{w_\mu} = (B_-(n)w_\lambda P_+/P_+) \cap (B_+(n)w_\mu P_+/P_+).$$

$GR_{w_\lambda}^{w_\mu} \neq \emptyset \iff w_\lambda \leq w_\mu \iff \mu \leq \lambda.$

- $S_{\lambda/\mu}^\circ$ es una subvariedad densa de $GR_{\lambda/\mu}^\circ$.

$M \in P_+ = P_+(k, n) \iff$

$M \in GL(n)$ y

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}^k & \overbrace{\begin{matrix} * \end{matrix}}^{n-k} \\ 0 & \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} \end{pmatrix}$$

ó

$$M = \begin{pmatrix} \begin{matrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{matrix} & * \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}}_k \end{pmatrix}$$

$\overbrace{\hspace{1cm}}^{n-k}$

Var. de Richardson Grassmannianas

- A cada skew diagram asociamos un **único** par de permutaciones $w_\lambda \leq w_\mu$ k -Grassmannianas.
- A cada perm. w k -Grassmanniana asociamos **único** k -conjunto $I \subseteq [n]$ y **viceversa**:

Si w es k -Grass., $I_w = \{w(1), \dots, w(k)\}$.

Si $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$, hacemos

$$J := [n] \setminus I = \{j_1 < \dots < j_{n-k}\} \text{ y}$$

$$w_I(t) := \begin{cases} i_t & \text{si } 1 \leq t \leq k \\ j_t & \text{si } k+1 \leq t \leq n \end{cases}$$

• $n = 12 \quad k = 5$

• $w = [2 \ 4 \ 7 \ 9 \ 10 \ 1 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 11 \ 12]$

$I_w = \{2, 4, 7, 9, 10\}$

• $I = \{3 \leq 8 \ 9 \ 10\}$

$w_I = [3 \ 5 \ 8 \ 9 \ 10 \ 1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 7 \ 11 \ 12]$

Escribimos $G^{\circ}R_{I_w}^{I_u} = G^{\circ}R_w^u$

• Si $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ y $J = \{j_1 < \dots < j_k\}$

$I \leq J \iff i_\ell \leq j_\ell \quad \forall \ell \in [k]$

• $I_{w_\lambda} \leq I_{w_\mu} \iff w_\lambda \leq w_\mu \iff \mu \leq \lambda.$

Var. de Richardson Grassmannianas

- $C^J =$ todos los $V \in \text{Gr}(k, n)$ tales que en alguna base $\{v_1, \dots, v_k\}$

$$M_v = \begin{pmatrix} & i_1 & & i_2 & & & i_{k-1} & i_k \\ * & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & * & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \vdots & * & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & & 0 & \dots & * & * & \boxed{1} & 0 & 0 \\ & & & & & * & * & 0 & * & \boxed{1} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}} \right\} v_1, \dots, v_k$$

i.e. donde la matriz con renglones $v_1, \dots, v_k$ este en **forma escalonada por renglones reducida reverse**.
con pivotes dados por J .

$C_I = V \in \text{Gr}(k, n)$ tq en alguna base M_v esté en **forma escalonada por renglones reducida**.
con pivotes dados por I .

- C^J es una celda de Schubert en $\text{Gr}(k, n)$.

- C_I es una celda de Schubert opuesta en $\text{Gr}(k, n)$.

- $GR_I^J = C_I \cap C^J$

● $n=7$ $k=3$ $I = \{2, 4, 6\}$

$$C_I: \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^I: \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Var. de Richardson Grassmannianas

$$\bullet \mathring{G}R_I^J \neq \emptyset \Leftrightarrow I \leq J$$

$$\bullet V \in \mathring{G}R_I^J \Leftrightarrow$$

$$\Delta_I(V), \Delta_J(V) \neq 0$$

$$\text{y } \Delta_K(V) = 0 \text{ si } I \neq K \text{ o } K \neq J.$$

• No se conoce estructura de conglomerao en general.

$$I \neq K \not\Rightarrow K \leq I$$

$$I = \{2, 4, 6\}$$

$$K = \{2, 3, 7\}$$

• Var. de Richardson Grass. grandes

$$\bullet I = \{1, \dots, k\} \quad \text{y} \quad J = \{n-k+1, \dots, n\}$$

$$\bullet \forall K \in \binom{[n]}{k}, \quad I \leq K \text{ y } K \leq J.$$

$$\therefore V \in \mathring{G}R_I^J \Leftrightarrow \Delta_I(V), \Delta_J(V) \neq 0.$$

$$\bullet \mathring{G}R_I^J \cong GL(n) \times \mathbb{C}^{k(n-k) - (\min\{k, n-k\})^2}$$

$$\bullet \mathbb{C}[\mathring{G}R_I^J] \cong \mathbb{C}[\widehat{Gr(k, n)}][\Delta_I^{-1}] / (\Delta_J - 1)$$

$$\bullet \text{Si } k = n-k \text{ (i.e. } n = 2k)$$

$$\mathring{G}R_I^J \cong GL(n)$$

⤴ Si hay estructura de conglomerao

GeKhtmon · Shapiro · Vainstein 2019

