

Grupos Plabic fueron introducidos por Postnikov en el 2006

"Total positivity, Grassmannians and networks"

Definición Sea un disco D cerrado en $\mathbb{R}^2$ y ∂D su frontera.

Una gráfica Plabic G es una gráfica plana y bicoloreada, con vértices blancos y negros, embebida en el disco, con algunos vértices sobre ∂D .

* Grafo bipartito, la partición está dada por la coloración
"No hay aristas entre vértices del mismo color"

* D disco

* ∂D frontera

* G plabic

* ∂G vértices de G en ∂D .

Características.

vértices frontera
↗

1) Únicamente tenemos vértices negros en ∂G

↳ Se numeran con $[n]$ en el sentido horario

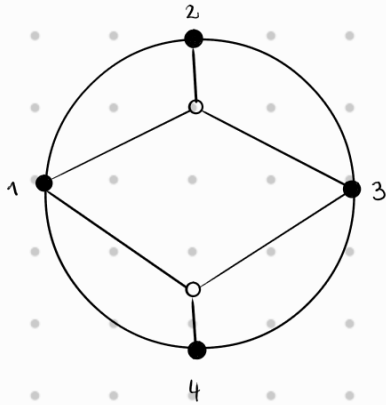
2) Vértices que no están en ∂G se llaman vértices interiores

↳ Hay $m+k$ vértices blancos

↳ Hay m vértices negros

Spoiler: κ será el parámetro que relaciona $G(\kappa, n)$ con G .

Ejemplo. $n=4$, $m+\kappa=2 \Rightarrow \kappa=2 \Rightarrow G(2,4)$

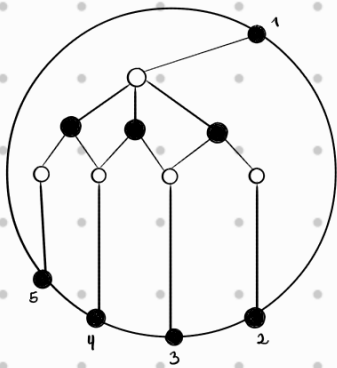


$$\# \text{ caras} = \kappa(n - \kappa) + 1$$

$$\kappa \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \dots & \emptyset \\ \vdots & & \vdots \\ \emptyset & \dots & \emptyset \end{matrix}}^{n-\kappa} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$n=5, m+\kappa=5, m=3 \Rightarrow \kappa=2$$



Emparejamiento perfecto de G Es una colección de aristas M de G de tal manera que cada vértice interior está exactamente en una arista de M y cada vértice frontera está a lo más en una arista de M .

Observación. Hay k vértices de $\mathcal{G}$ cubiertos por M .

* M emparejamiento perfecto

* ∂M vértices de $\mathcal{G}$ cubiertos por M



k -subconjunto de $[n]$

Objetivo: Contar los emp. perf. tales que $\partial M = I$,
con I fijo.

función de peso. Asignar pesos $w(e)$ a cada
arista e de G , $w(e) \neq 0$.

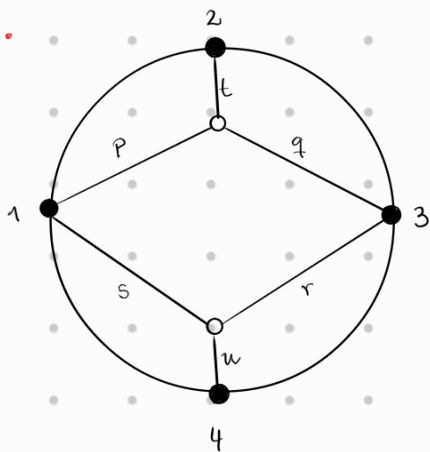
$\rightarrow$ El peso de un emp. perf. M es

$$w(M) = \prod_{e \in M} w(e)$$

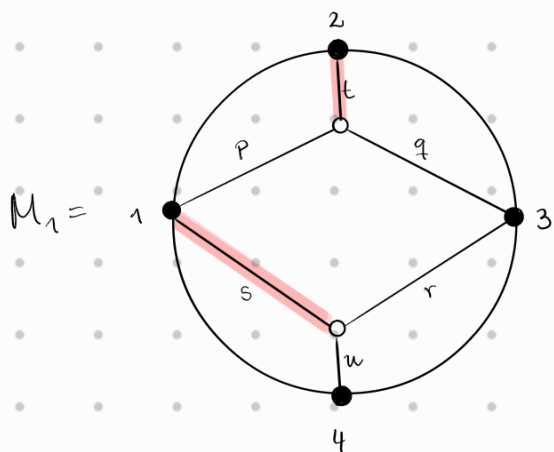
$\rightarrow$ Para un subconjunto I de $[n]$ se
define

$$D_I = \sum_{\partial M = I} w(M)$$

Ejemplo.



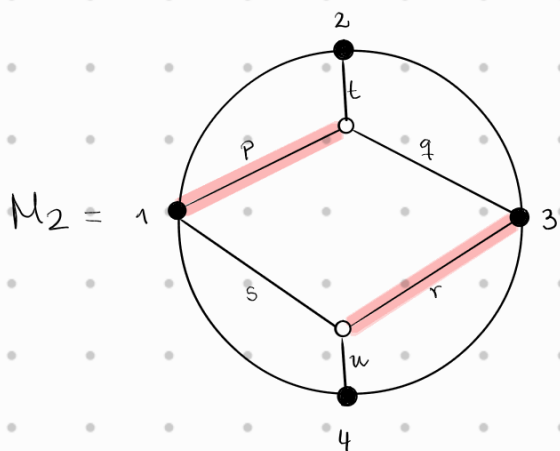
$$* I = \{1, 2\}$$



$$\Rightarrow w(M_1) = st$$

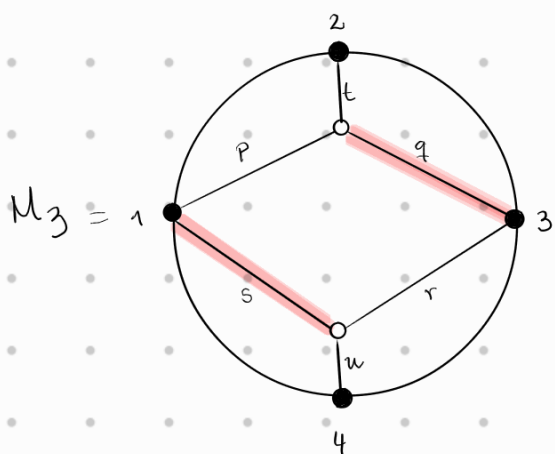
$$D_{12} = w(M_1)$$

$$* I = \{1, 3\}$$

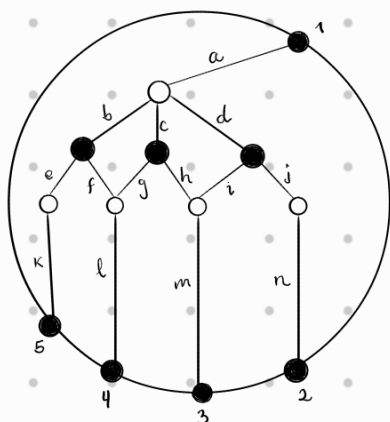


$$w(M_2) = pr$$

$$D_{13} = pr + sq$$



$$w(M_3) = sq$$

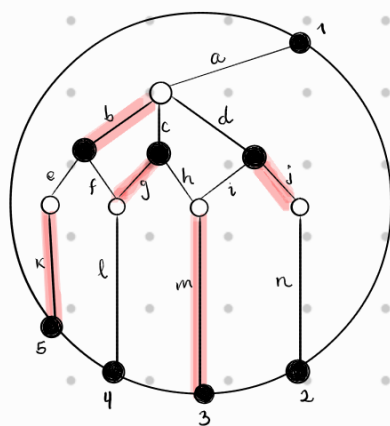
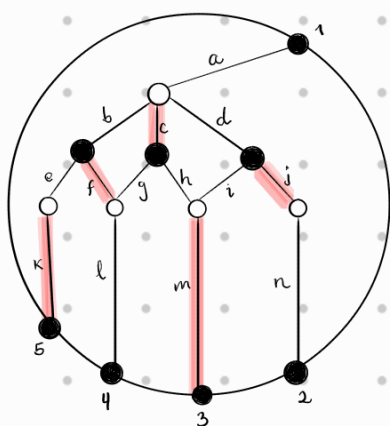


$$D_{35}$$

$$D_{24} = \ln(dh + ci)$$

$$D_{25} = n \cdot K (big + fhd + fci)$$

13,52



$$D_{35} = kmfcj + kmbgj$$

Observación.

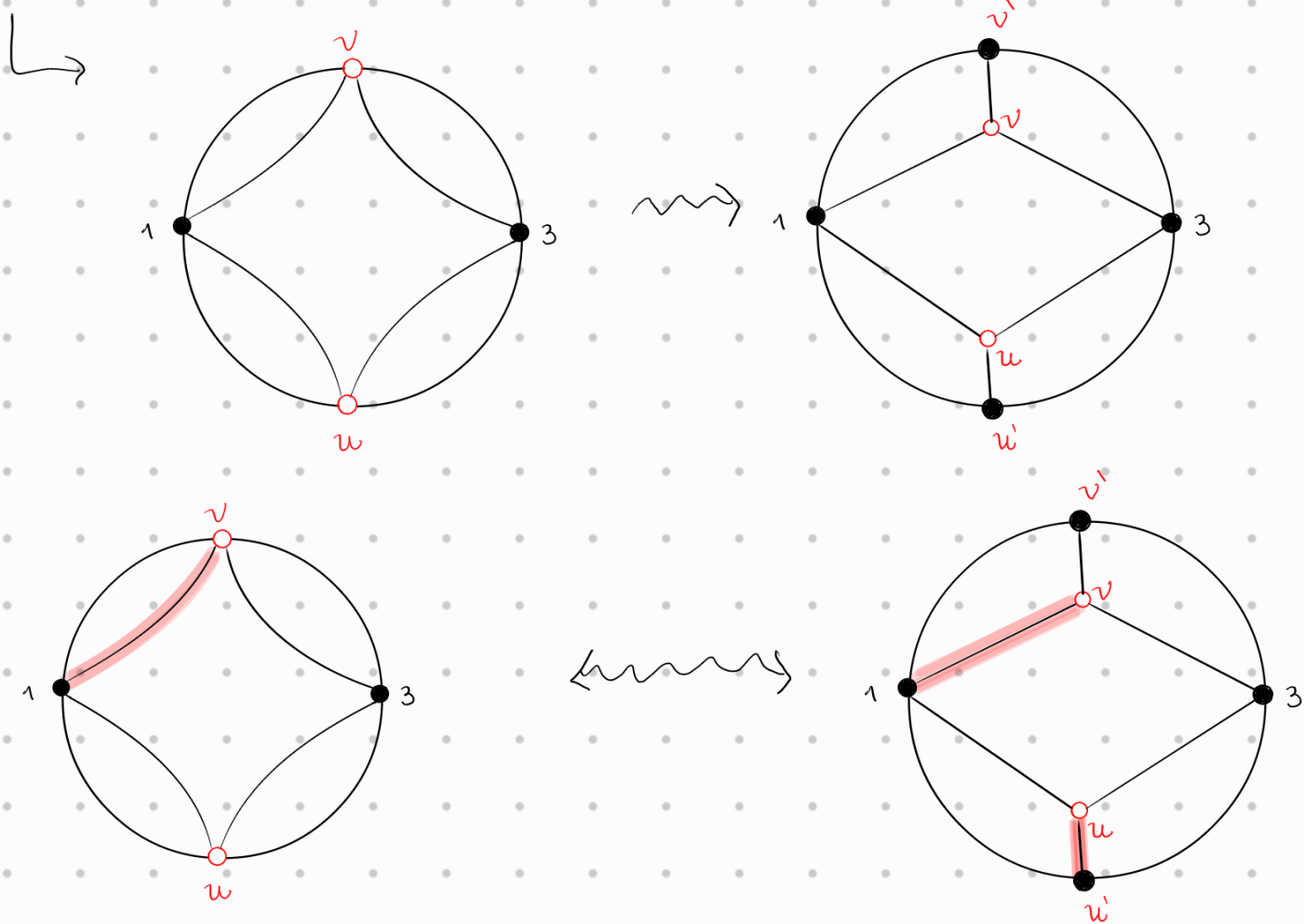
Escoger vértices negros en la frontera es conveniencia.

En general, para un grafo bicolorado (vértices blancos y negros en la frontera)

$\partial_w(G) =$ conjunto de vert. frontera blancos

$\partial_b(G) =$ " " " " negros

$$\partial(M) = \{ v \in \partial_w(G) : v \text{ no está en } M \} \cup \{ v \in \partial_b(G) : v \text{ está en } M \}$$



Teorema 7.3. Para cualquier asociación de pesos $w(e)$ en un cuerpo $\mathbb{K}$, o bien D_I son n^0 , o bien existe un κ -plano $LC \mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas de Plücker $\Delta_I(L)$ coinciden con los D_I para todo I .

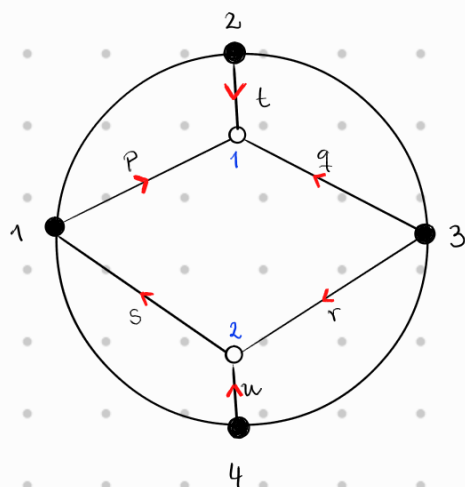
Ejemplo.

$$D_{13} D_{24} = D_{12} D_{34} + D_{14} D_{32}$$

$$(pr + qs)(tu) = (st)(qu) + (pu)(rt)$$

permanentes - determinantes $\Rightarrow$ Kasteleyn

$\Rightarrow$ Colocar una cantidad impar de flechas en cada cara en el sentido horario



$$\underbrace{\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p & -s \\ t & 0 \\ q & r \\ 0 & u \end{bmatrix} \end{matrix}}_{2\text{-plano}} \rightarrow \Delta_I = D_I$$

Aplicación de medición de frontera
(boundary measurement map)

* Asumir que G tiene al menos un emp. perf.

Sea $\text{Edge}(G) = E(G)$ aristas de G .

$D_I = \sum_{\partial M = I} w(M)$ es un polinomio con coeficientes no negativos en los pesos $w(e)$.

$$\mu : \begin{matrix} \mathbb{K}^{E(G)} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^{\binom{n}{2}} \\ (w(e))_{e \in E(G)} & \xrightarrow{\quad} & (D_I)_{I = \partial M} \end{matrix}$$

$$* w(e) \neq 0 \in \mathbb{K}^* = \mathbb{G}_m$$

* D_I se pueden ver como menores de Plücker

$$\mu: \mathbb{G}_m^{E(G)} \longrightarrow G(k, n)$$

$$* w(e) > 0 \Rightarrow D_I \geq 0$$

$\Rightarrow$ Si existe al menos un emp. perf. M con $\partial M = I$, para todo $I \Rightarrow D_I > 0$

$$\mu: \mathbb{R}_{>0}^{E(G)} \longrightarrow G(k, n)_{>0}$$

Teorema. Existe una celda positroide $\overset{\circ}{\Pi}$ en $G(k, n)$ tal que la imagen de μ es $\overset{\circ}{\Pi}_{>0}$.

* gauge-equivalente

Sea $V(G)$ los vértices internos de G .
Decimos que dos pesos w y w' son gauge-equivalentes si existe una aplicación

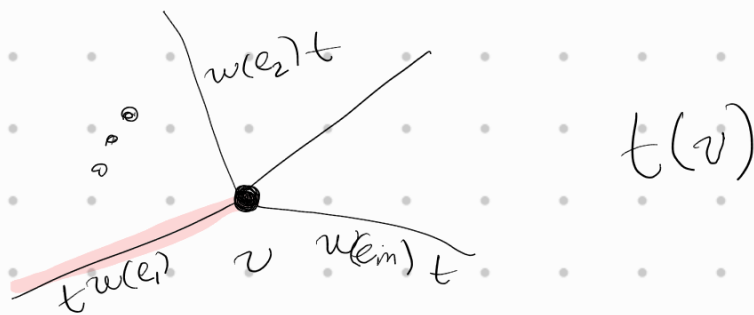
$$t: V(G) \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

de tal manera que para cada arista e con

$$v \xrightarrow{e} u$$

se tiene que $w'(e) = t(u)t(v)w(e)$

Sea $v \in V(G)$. Si se reescalan todas las aristas incidentes a ese vértice por un factor t , como v está cubierto por una arista en cada emp. perf. que se considere, entonces t aparece como factor en todos los $w(M) \Rightarrow D_{\pm}$ va a aparecer multiplicado por t .



* $w : E(G) \rightarrow G_m \leftarrow$ Cada punto w es una función

* $t : V(G) \rightarrow G_m$

↓
Colección de todas las aplicaciones nos permite definir una acción de

$G_m^{V(G)}$ sobre $G_m^{E(G)}$

$$(t \cdot w)(e) = t(u)t(v)w(e), \quad \text{con } u \xrightarrow{e} v$$

$$T := G_m^{E(G)} / G_m^{V(G)}$$

Toro de funciones de peso módulo gauge-equivalencia.

$$\mu: T_{>0} \longrightarrow G(k,n)_{>0}$$

Lema (11.1, Postnikov) $\dim T = |E(G)| - |V(G)| = \# \text{Caras}(G) - 1$

Teorema. Sea G planar, y sea $\tilde{\Pi}$ su correspondiente variedad positroide. Entonces son equivalentes:

1) $\dim T = \dim \tilde{\Pi}$. Es lo mismo que

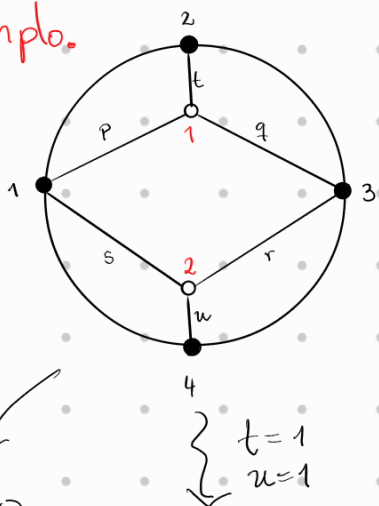
$$\# \text{Caras}(G) = \dim \tilde{\Pi} + 1.$$

2) $\mu: T_{>0} \longrightarrow \tilde{\Pi}_{>0}$ es biyectiva.

3) $\mu: T_{>0} \longrightarrow \tilde{\Pi}_{>0}$ es difeomorfismo.

Definición. Si se cumple alguna, G se llama reducido.

Ejemplo.

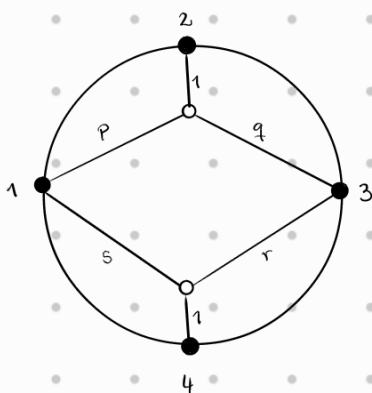


$$t: V(G) \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

$$1 \longmapsto t^{-1}$$

$$2 \longmapsto u^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} t=1 \\ u=1 \end{array} \right\}$$



$$T: \mathbb{G}_m^E / \mathbb{G}_m^\vee$$

coordenadas

tiene

$$(p, q, r, s) \in \mathbb{G}_m^4$$

$\mu : T \longrightarrow G(2,4)$ envía al subespacio dado por

$$\begin{bmatrix} p & -s \\ 1 & 0 \\ q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(p, q, r, s)$$

a las coordenadas de Plücker

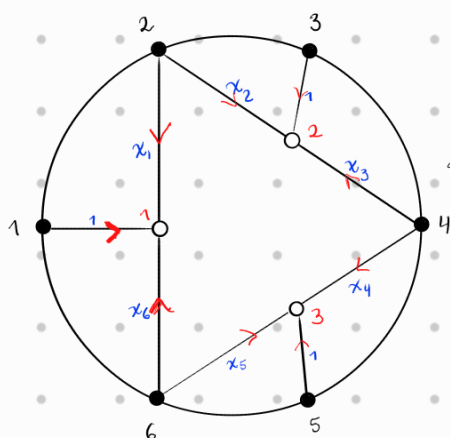
$$(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{24}, \Delta_{34}) = (s, pr+qs, p, r, 1, q)$$

$$\mu(p, q, r, s) = (s, pr + qs, p, r, 1, q)$$

* $\Delta_{24} = 1 \neq 0$ $\Delta_{12} = S$ $\Delta_{23} = r$
 $\Delta_{14} = p$ $\Delta_{34} = q$

μ es polinomial y es inyectiva

Ejemplo. $n = 6$, $k = 3$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 0 & x_5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{135} = 1$$

$$\Delta_{123} = 0$$

$$\Delta_{345} = 0$$

$$\Delta_{156} = 0$$

$$\Delta_{124} \neq 0 \Rightarrow \text{Como } I_1 = \{1, 2, 4\} \text{ y } 1 \in I_1$$
$$I_1 = \{1\} \cup \{3\}$$

$(124, 234, 346, 456, 562, 612) \Rightarrow$ Collar grassmann

$x_i > 0, 1 \leq i \leq 6 \Rightarrow \mu: \mathbb{R}_{>0}^6 \longrightarrow G(3,6)$ es una parametrización difeomorfa

Observación. El concepto de plabic reducido viene de la relación que se puede encontrar con el concepto de palabra reducida.

Combinatorio

Unipotente
Permutación $w \in S_n$
+ palabra reducida

Plabic
Permutación afín
acotada + P reducido

Parámetros

$(t_1, \dots, t_a)$

$(w(e))$ e arista

Parametrización

$\gamma(t_*) \in \mathcal{U}_{-}^{\geq 0}$

$\mu(w(e)) \in G(k, n)_{\geq 0}$

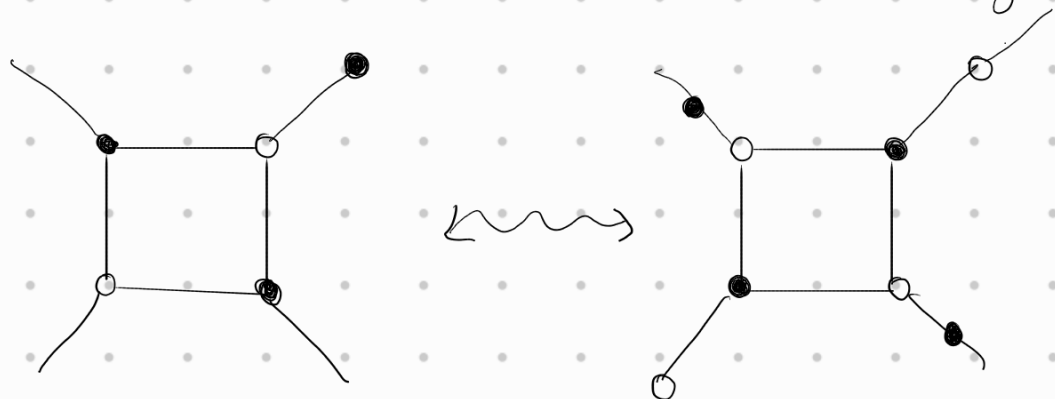
"Movimientos"
"reducción"

$S_i S_i \longrightarrow 1$
conmutaciones, braids

?

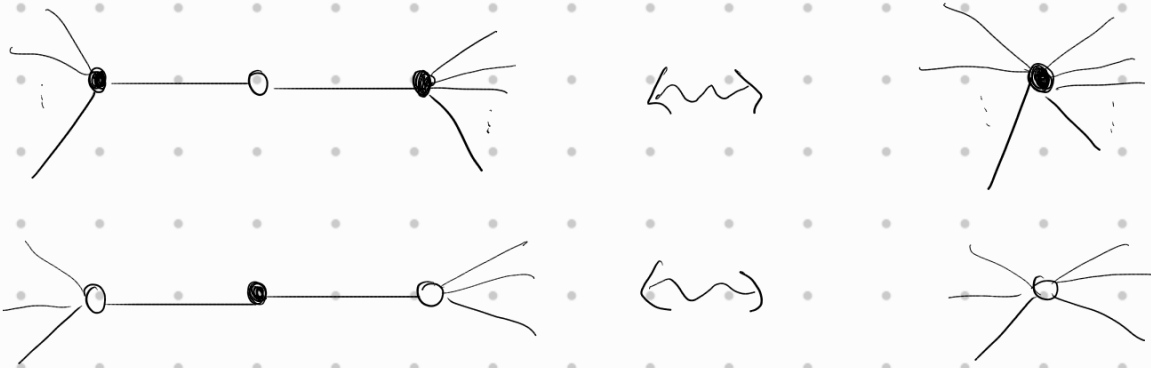
Transformaciones y reducción (Postnikov)

* M_1 (Movimiento en cuadrados) Vértices de grado 3

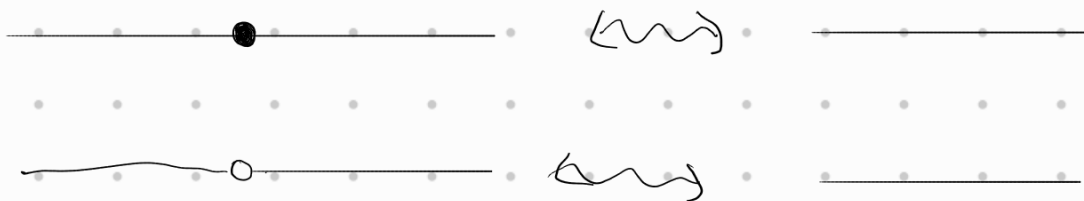


M_2 : Contraer / expandir:

Cualquier vértice de grado 2 no adyacente a un vértice de la frontera

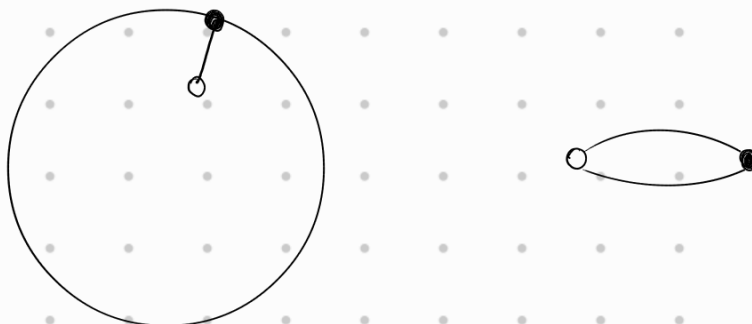


M_3 : Insertar o remover vértice medio



E_1 : Eliminar

Vértices internos de grado 1, o aristas que producen caras de tamaño 1, las podemos eliminar



Teorema 7.9. Dada cualquier variedad positroide Π . Sea G' el plabic asociado a Π . Entonces G' puede transformarse en un plabic G reducido asociado a Π por medio de transformaciones/reducciones. Si G y G' son reducidos, solo se necesitan transformaciones.

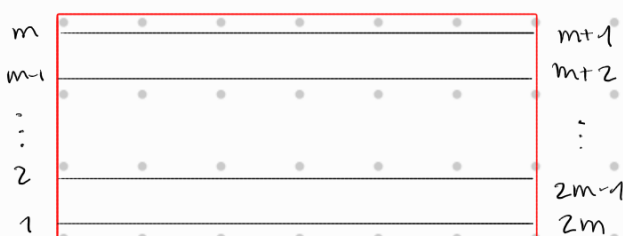
$$\rightarrow \dim T = \dim T'$$

Observación. (Wiring diagrams - Diagramas de cable)

Si tenemos una permutación $w \in S_m$, podemos asociar una perm. afín acotada $\tilde{w} \in \tilde{S}_{2m}^m$

$$\tilde{w}(i) = \begin{cases} 2m+1-i & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ w^{-1}(i-m)+2m & \text{si } m+1 \leq i \leq 2m \end{cases}$$

- 1) Tomar D como un rectángulo
- 2) Colocar los vértices de 1 hasta m en el lado izquierdo del rectángulo, y los vértices $m+1$ hasta $2m$ en el lado derecho, de tal manera que hay una línea horizontal de i a $2m-i+1$.



- 3) Si $s_{i_1} \dots s_{i_n}$ es una palabra reducida para w ; para cada s_{i_k} dibujamos una línea vertical de la etiqueta

i_k a $i_k + 1$, colocando un vértice blanco en la parte superior de esa línea, y un vértice negro abajo.

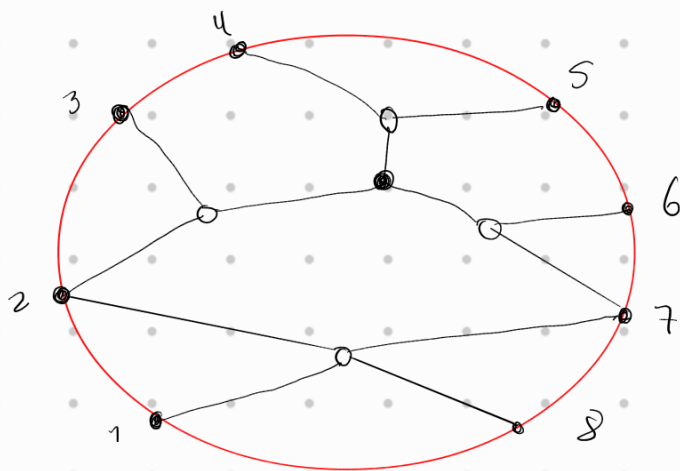
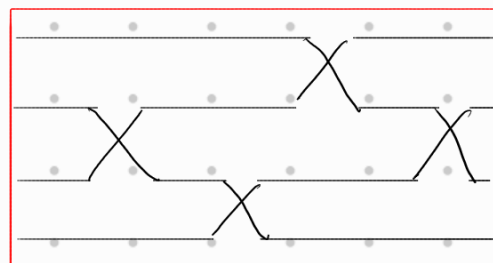
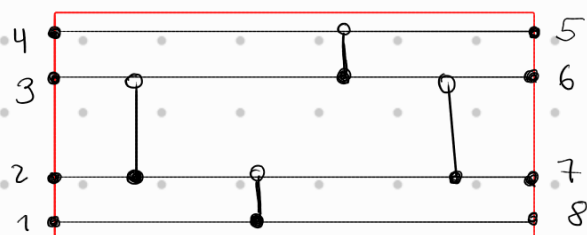
4) Contracer vértices adyacentes del mismo color.

Observación. (Diagrama puente)



$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$$

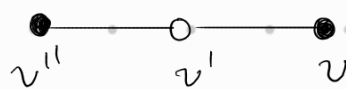
$$w = S_2 S_1 S_3 S_2$$



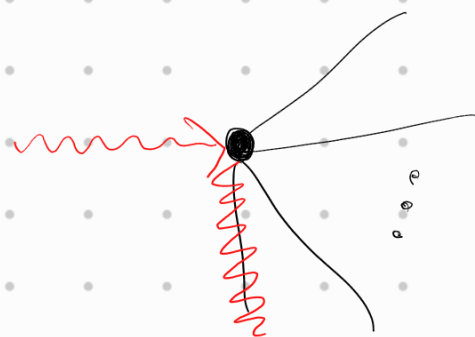
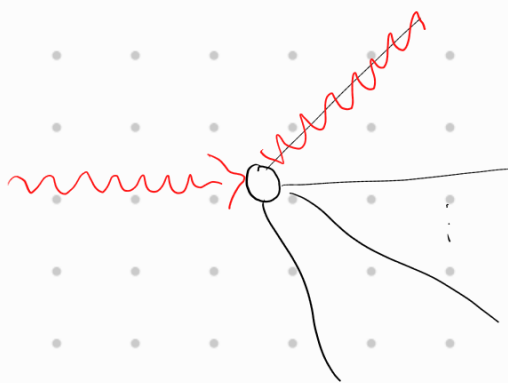
7.2. Caminos zig-zag. ¿Cómo saber que G es reducido?

⚠ Vamos a suponer que todos los vértices frontera tienen grado 1.

Si tengo un vértice $v \in \partial G$ que no tiene grado 1, entonces movemos v al interior de D y agregamos



Definición. Un camino zig-zag es un camino dirigido tal que, cuando el camino llegue a un vértice blanco, gira maximalmente a la izquierda, y cuando llegue a un vértice negro gira maximalmente a derecha.

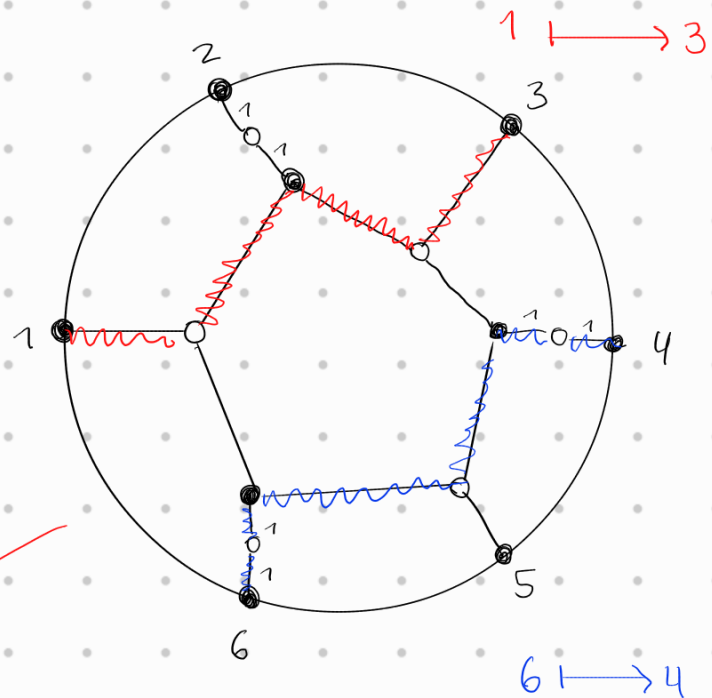
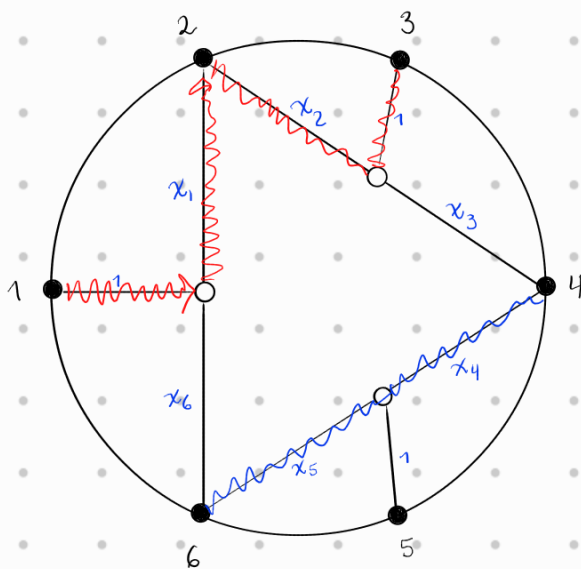


* Vamos a empezar en vértices frontera

* Acabamos con el camino cuando

1) llegamos a un vértice frontera ✓

2) Se hace un bucle con el camino



$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$(124, 234, 346, 456, 562, 612)$ collar grassmann

Permutación: Tomamos todos los caminos posibles y asociamos $f(i) = j \mod n$ donde j es el vértice final del camino que iniciamos en i .

Teorema. G plabic, el cual no tiene vértices de grado 1 incidentes a los vértices frontera. Entonces G es reducido si y sólo si:

- 1) Cada camino zig-zag de G une dos puntos de $\mathcal{I}(G)$
- 2) Si α es un camino zig-zag el cual une los vértices frontera i y j , $i \neq j$, entonces α no

pasa por una misma arista dos veces.

3) Si α y β son dos caminos zig-zag distintos que pasan por las aristas e y f , entonces e y f aparecen en orden opuesto en α y β .

4) Si α es zig-zag que une a un vértice i consigo mismo, entonces, i es aislado o i limita con un único vértice interior.

Observación. Teorema anterior $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \Rightarrow$ Se puede escribir de la siguiente forma:

Sea e una arista de G , y sean γ_1 y γ_2 dos trayectoria zig-zag que empiezan en e . Entonces G es reducido si y sólo si, $\gamma_1(e)$ y $\gamma_2(e)$ no tienen aristas en común salvo la inicial.

