Curso "El amplituhedro"

Amplitudes de dispersión
- física de partículas (QFT)
- cosmología
- teoría super Yang-Mills *
- Wilson loops

Combinatoria
- matroides
- gráficas
- hipersimplejo

Positividad total
- alg. lineal
- geom. alg. real
- geometrías positivas y binarios

Amplituhedro

Geometría poliedral
- politopos
- complejos simpliciales
- descomposiciones (tilings)

Geometría algebraica
- Grassmanniana
- variedades Schubert / positroides
- variedades bandera
- conjuntos semialg.

Temario

1) La Grassmanniana positiva y su estratificación matroide
2) El mapeo momento, tiling positroide, Grassmanniana tropical
3) El amplituhedro y estratificación de signo
4) El mapeo amplituhedro, tiling positroide y particiones planas
5) T-dualidad : $\Delta_{k+1,n}$ y $\mathcal{A}_{n,k,2}$
6) El amplituhedro y alg. de conglomerado

Referencias

- Guía: Lauren K. Williams ICM Lecture notes
  2110.10856
  "The positive Grassmannian, the amplituhedron
  and cluster algebras"

- Matteo Parisi
  "Combinatorial aspects of scattering amplitudes"
  Springer theses 2023

- (hoy) James Oxley "Matroid theory"
  Oxford Graduate texts in Math. 2011

- Alexander Postnikov arxiv: math/0609764
  "Total positivity, Grassmannians, and networks"

① La Grassmanniana positiva y su estratificación de matroide

$\mathbb{K}$ campo

La Grassmanniana

$$Gr_{k,n}(\mathbb{K}) = \{ V \subset \mathbb{K}^n : \dim_{\mathbb{K}}(V) = k \} = Gr_{k,n}$$

Notación: $[n] = \{1, \ldots, n\}$

$$\binom{[n]}{k} = \{ I \subset [n] : |I| = k \}$$

Puntos en $Gr_{k,n}$ presentados por matrices:

1) Escoge una base $B_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$

⚠ ¡La construcción depende de B_n!

2) Dado $V \in \mathrm{Gr}_{k,n}$ escoge una base $B_V = \{v_1, \dots, v_k\}$ de V ⚠ ¡La construcción depende de B_V!

3) Escribe $v_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_j$ expresando v_i en B_n $\forall\, i = 1, \dots, k$

4) Define la matriz

$$C = C_V = C(B_n, B_V) = (c_{ij}) \in \mathbb{K}^{k \times n}$$

Ejercicios:

1) Cambiando la base B_n por B_n' ¿cómo cambia la matriz C_V?

2) Cambiando la base B_V por B_V' ¿cómo cambia la matriz C_V?

Ejemplo: Sean $k=2, n=4$, B_4 base estandar, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

V generado por $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\4\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

- $B_V = \{v_1, v_2\}$ $\quad C_V = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

- $B_V = \{v_1, v_2 + 2v_1\}$ $\quad C_V = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 7 & 9\end{pmatrix}$ $*$

- $B_V = \{v_1, v_1 - 3v_2\}$ $\quad C_V = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

- $B_V = \{v_1 - 3v_2, v_2\}$ $\quad C_V = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $*$ (favorito de Lara)

Las coordenadas de Plücker

Dado $I \in \binom{[n]}{k}$ y $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{K}^{k \times n}$

$$p_I(C) := \det\left((c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j \in I}} \right)$$ La coordenada de Plücker

El vector de Plücker de C

$$pl(C) = (p_I(C))_{I \in \binom{[n]}{k}} \in \mathbb{K}^{\binom{n}{k}}$$

Ejemplo: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$p_{\{1,3\}}(C) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad p_{\{3,4\}}(C) = \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$$pl(C) = (\underset{12}{0}, \underset{13}{1}, \underset{14}{1}, \underset{23}{0}, \underset{24}{0}, \underset{34}{-1})$$

Aplicación de Plücker

$$pl : Gr_{k,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$$

$$V \longmapsto [pl(C_V)]$$

Teorema

La aplicación de Plücker es un encaje, entonces le da la estructura de variedad proyectiva a $Gr_{k,n}(\mathbb{K})$.

Ejercicio: Demuestra que $pl : Gr_{k,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{\binom{n}{k}-1}$ es biendefinido, es decir no depende de la elección de C_V representando $V \in Gr_{k,n}(\mathbb{K})$

Ejemplo: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

representan al mismo punto en $Gr_{2,4}$

$$pl(C) = (\underset{12}{0}, \underset{13}{1}, \underset{14}{1}, \underset{23}{0}, \underset{24}{0}, \underset{34}{-1})$$

$$pl(C') = (0, -1, -1, 0, 0, 1)$$

Observamos $\quad pl(C) = -pl(C')$ en $\mathbb{R}^6$

$\Rightarrow \quad [pl(C)] = [-pl(C')]$ en $\mathbb{P}^5$

Convención:

Identificamos

$$V \in Gr_{k,n}(\mathbb{k}) \longleftrightarrow pl(V) \in \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{\binom{n}{k}-1}$$

$$\updownarrow$$

(esp. vect. generado por las filas de) $C_V \in \mathbb{k}^{k\times n}$

Notamos: Si $C \in \mathbb{k}^{k\times n}$ de rango completo

$\Rightarrow$ representa un punto $V_C \in Gr_{k,n}(\mathbb{k})$

~1980s Whitney, MacPherson, Serganova, da Silva, ...

Matroides [Oxley, "Matroid theory" 2011]

June Huh

Un matroide $\mathcal{M}$ es un par $(E, \mathcal{I})$ donde

- E es un conjunto finito (el conjunto base de $\mathcal{M}$)
  e.g. $[n]$
- $\mathcal{I}$ es una colección no vacía (finita) de subconjuntos de E
  (sus elementos se llaman conjuntos independientes de $\mathcal{M}$)

que cumplen

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) heredabilidad $\quad I \in \mathcal{I}$ y $J \subseteq I \Rightarrow J \in \mathcal{I}$

(I3) augmentación de independencia

$I, J \in \mathcal{I}$ con $|I| < |J| \Rightarrow \exists\, z \in J \setminus I$

tal que $I \cup \{z\} \in \mathcal{I}$ //

Notación: • $J \subset E$ con $J \notin \mathcal{I}$ se llama un conjunto dependiente

• $B \in \mathcal{I}$ maximal respecto a la inclusión se llama una base de $\mathcal{M}$

Es decir, $B \in \mathcal{I}$ y $\nexists\, Z \in \mathcal{I} : B \subsetneq Z$

• $\mathcal{B}$ es el conjunto de bases de $\mathcal{M}$

Lema 1 Dado (I1) (I2) tenemos que (I3) es equivalente a

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow |B_1| = |B_2|$

$\hookrightarrow$ $|B|$ para $B \in \mathcal{B}$ es el rango de $\mathcal{M}$, $rk(\mathcal{M})$

Ejercicio: prueba del Lema

Con el Lema tenemos que

$\mathcal{M}$ cumple (I1), (I2), (I3)

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ cumple (I1), (I2), (B2)

★

Lema 2: Sea $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroide con $\mathcal{B}$ su conjunto de bases. Se cumple

(MB) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ son distintos

y $b_1 \in B_1 \setminus B_2$

$\Rightarrow \exists\, b_2 \in B_2 \setminus B_1 : (B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in \mathcal{B}$

Definición de un matroide a partir de bases:

$\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ con

- E un conjunto finito
- $\mathcal{B}$ una colección finita de subconjuntos de E

es un matroide si cumple (MB)

Si $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ es un matroide, definimos

$$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \{ I \subset E : \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } I \subset B \}$$

los conjuntos independientes son subconjuntos de bases

Teorema:

Si $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ es un matroide según la definición a partir de bases entonces $(E, \mathcal{I}(\mathcal{M}))$ cumple (I1) - (I3) y vice versa

Prueba de Lema 2 ("vice versa" en Teorema)

Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1, B_2 \in \mathcal{I}$ y $|B_1| = |B_2|$

Si $B_1 \neq B_2 \Rightarrow \exists\, b_1 \in B_1 \setminus B_2$

$$\overset{(I2)}{\Rightarrow} B_1 \setminus \{b_1\} \in \mathcal{I}$$

Tenemos $|B_1 \setminus \{b_1\}| < |B_2|$

$$\overset{(I3)}{\Rightarrow} \exists\, b_2 \in B_2 \setminus B_1 : (B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in \mathcal{I}$$

Afirmación: $B_{12} := (B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in \mathcal{B}$

prueba: supongamos $B_{12} \notin \mathcal{B}$

$\Rightarrow \exists \; B \in \mathcal{I}$ t.q. $B_{12} \subsetneq B$

Sea B maximal con esta propiedad $\Rightarrow B \in \mathcal{B}$

pero $|B| > |B_{12}| = |B_2|$ ↯ al Lema 1 //

entonces, $B_{12} \in \mathcal{B}$ $\square$

Ejercicio: Dado $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ un matroide (que cumple (MB)) con $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ colección de conjuntos independientes $(E, \mathcal{I}(\mathcal{M}))$ cumple (I1) – (I3)

Ejemplo: $\mathcal{M} = ([3], \mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$

↪ $rk(\mathcal{M}) = 2$

Se cumple (MB):

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \neq B_2$ con $b_1 \in B_1 \setminus B_2$

$\Rightarrow \exists \; b_2 \in B_2 \setminus B_1$: $B_{12} = (B_1 \setminus \{b_1\}) \cup \{b_2\} \in \mathcal{B}$

B_1	B_2	b_1	b_2	B_{12}	B_{21}
12	13	2	3	13	12
12	23	1	3	23	12
13	23	1	2	23	13

☆

$\mathcal{I}(\mathcal{M}) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$

Ejercicio: $(E, \mathcal{I}(\mathcal{M}))$ cumple (I1) – (I3)

(I1) ✓

(I2) ✓

Circuitos

Sea $\mathcal{M}$ un matroide

Un conjunto minimal dependiente se llama un circuito de $\mathcal{M}$.

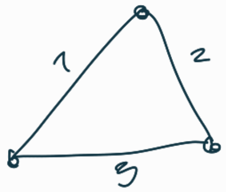
Notación: $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ la colección de circuitos de $\mathcal{M}$.

Ejemplo: Podemos representar matroides por gráficas

$E \longleftrightarrow$ aristas

$\mathcal{C}(\mathcal{M}) \longleftrightarrow$ ciclos en la gráfica

e.g.



$E = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{C} = \{\{1,2,3\}\}$

$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

$\mathcal{B} = \{\{12\}, \{13\}, \{23\}\}$

Si C_n es una gráfica cíclica de n vértices su matroide se llama el matroide uniforme. U_n

Lema: Sea $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroide con $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{M})$.

Se cumple

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ y $C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$

(C3) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ distintos y $e \in C_1 \cap C_2$

$\Rightarrow \exists\, C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subset (C_1 \cup C_2) - e$

axioma de eliminación de circuitos

Prueba: (C1) y (C2) son consecuencias directas

(C3) Ejercicio

Teorema Sea E un conjunto finito y $\mathcal{C}$ una colección (finita) de subconjuntos que cumple (C1) - (C3).

Sea $\mathcal{I}$ la colección de subconjuntos de E que no contienen ningún elemento en $\mathcal{C}$.

Entonces $(E, \mathcal{I})$ es un matroide con

$$\mathcal{C}(E, \mathcal{I}) = \mathcal{C}.$$

Ejemplo: Sea $M = ([5], \mathcal{I})$ con

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, 1, 2, 4, 5, 12, 15, 24, 25, 45\}$$

conjuntos independientes

Los conjuntos dependientes de M son

$$\{3, 13, 14, 23, 34, 35\} \cup \{X \subset [5] : |X| \geq 3\}$$

los circuitos (conj. dep. min.) son

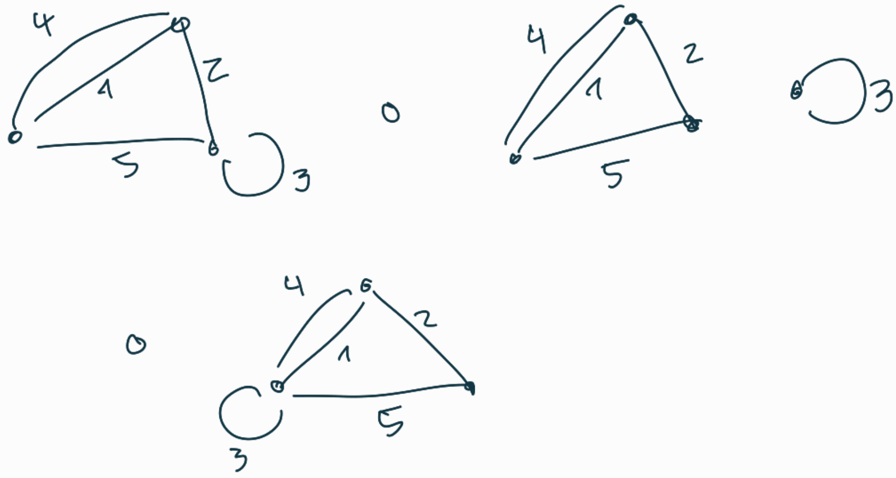
$$\{3, 14, 125, 245\} = \mathcal{C}(M)$$

$\{2,3\} \supset \{3\} \Rightarrow \{2,3\}$ no es circuito

cada conjunto que contiene 3 no es circuito y no es igual a $\{3\}$

$\{1,2,4,5\} \supset \{1,4\} \Rightarrow 1245$ no es circuito

gráfica ciclos $\longleftrightarrow$ circuitos [5] matroide
aristas $\longleftrightarrow$



Prueba: P.D. $\mathcal{I}$ cumple (I1) − (I3)

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(E,\mathcal{I})$$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $I \in \mathcal{I}, J \subset I \Rightarrow J \in \mathcal{I}$

(I3) $I, J \in \mathcal{I}$, $|I| < |J| \Rightarrow \exists z \in J \setminus I$ t.q. $I \cup \{z\} \in \mathcal{I}$

(C1) $\Rightarrow$ (I1) ✓

(I2) Sea $I \in \mathcal{I} \Rightarrow \nexists C \in \mathcal{C} : C \subset I$

Sea $I' \subset I \Rightarrow \nexists C \in \mathcal{C} : C \subset I'$
$\Rightarrow I' \in \mathcal{I}$ ✓

(I3) Sean $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ con $|I_1| < |I_2|$

Supongamos que (I3) no se cumple para (I_1, I_2)

$\Rightarrow \exists I_3 \in \mathcal{I} : I_3 \subset I_1 \cup I_2$ y $|I_3| > |I_1|$ } ☆

↳ I_2 es un ejemplo de tal I_3

Sea I_3 tal que $|I_1 - I_3|$ es mínimal

(I3) no se cumple $\Rightarrow I_1 - I_3$ no es vacío

$\Rightarrow$ sea $e \in I_1 \setminus I_3$

$\forall f \in I_3 \setminus I_1$ definimos $T_f = (I_3 \cup e) - f$

$\Rightarrow \quad T_f \subseteq \underbrace{I_1 \cup I_2}$ y $\underbrace{|I_1 - T_f|} < \underbrace{|I_1 - I_3|}$

$\Rightarrow \quad T_f \notin \mathcal{I}$ (pues I_3 fue ☆ con $|I_1 - I_3|$ min.)

$\Rightarrow \quad \exists \; C_f \in \mathcal{C} : \; C_f \subseteq T_f$

$\Rightarrow \quad \underbrace{C_f \subseteq (I_3 \cup e) - f \; \Rightarrow}$ $f \notin C_f$ ☆ ↯

Además, $e \in C_f$ pues de lo contrario

$C_f \subset I_3$ ↯ $I_3 \in \mathcal{I}$

Sea $g \in I_3 - I_1$

Si $C_g \cap (I_3 - I_1) = \emptyset$

$\Rightarrow \quad C_g \subseteq ((I_1 \cap I_3) \cup e) - g \subseteq I_1$ ↯

entonces $C_g \cap (I_3 - I_1) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \quad \exists \; h \in C_g \cap (I_3 - I_1)$ y $C_h \neq C_g$

pues $h \notin C_h$

Tenemos $e \in C_g \cap C_h$

$(C3) \Rightarrow \exists \; C \in \mathcal{C} : \; C \subseteq (C_g \cup C_h) - e$

Como $C_g, C_h \subset I_3 \cup e \Rightarrow C \subseteq I_3$ ↯

$\Rightarrow$ (I3) se cumple.

$\boxed{\mathcal{C} = \mathcal{C}(E, \mathcal{I})}$ Observamos que los siguientes son equivalentes

(i) C es circuito de $M = (E, \mathcal{I})$, $C \in \mathcal{C}(E, \mathcal{I})$

$\Updownarrow$ $\checkmark$

(ii) $C \notin \mathcal{I}(M)$ y $C - x \in \mathcal{I}$ $\forall x \in C$

$\Updownarrow$

(iii) $\exists\, C' \in \mathcal{C}$: $C' \subset C$ pero $C' \neq C$

$\Updownarrow$ $\checkmark$

(iv) $C \in \mathcal{C}$ $\square$