Tenemos $\mu : S^2 \to \mathbb{R}$ es la función de altura (proyección al eje)

Observe: $\mu(S^2) = [0,1]$ es un politopo

$$\mu(\mathbb{P}^1) = \mu(\overline{\mathbb{C}^*}) = [0,1]$$

y los vértices 0 y 1 son imágenes de los polos = puntos fijos de la acción.

Definición: Sea $M = ([n], \mathcal{B})$ un matroide con $\mathcal{B}$ su conjunto de bases. Definimos el politopo matroide (de bases) Γ_M como la envolvente convexa de los vectores indicador de sus bases:

$$\Gamma_M = \mathrm{conv}(\underbrace{e_B}_{\sum_{i\in B} e_i} : B \in \mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^n$$

Similar, G gráfica realiz $\Gamma_G := \Gamma_{M(G)}$

Teorema [Gelfand-Goresky-MacPherson-Serganova]

Sea $C \in Gr_{kn}$. Entonces

$$\mu(\overline{TC}) = \Gamma_{M(C)}$$

Ejemplo: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{B} = \{12, 13, 14, 23, 24\}$

$pl(C) = (1,2,4,1,2,0)$

$$\mu(C) = \frac{\sum_{I\in\binom{[n]}{k}} |p_I(C)|^2 e_I}{\sum_{I\in\binom{[n]}{k}} |p_I(C)|^2}$$

$$\mu(C) = \frac{e_{12} + 4e_{13} + 16e_{14} + e_{23} + 4e_{24}}{26}$$

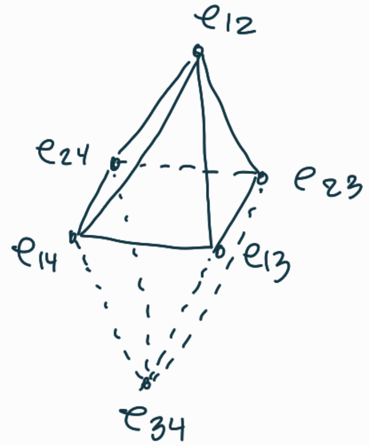
$$= \frac{1}{26}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 16\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix}21\\6\\5\\20\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 = \frac{1}{26}\left(20\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma_\mu = \operatorname{conv}\left(\underset{e_{12}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_{13}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_{14}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{e_{23}}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{e_{24}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}\right) \ni \mu(C)$$

$$\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_r) \ni \sum_{\substack{\sum \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0}} \lambda_i v_i$$



$$\dim \Gamma_\mu = 3 \subset \mathbb{R}^4$$

$$\Gamma_\mu \subset H = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \sum^{4} x_i = 2 \right\}$$

La orbita TC consiste puntos

$$t.C = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & -t_3 & -2t_4 \\ 0 & t_2 & 2t_3 & 4t_4 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{C}^*)^4 \ni t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$$

$$pl(C) = (t_1t_2, 2t_1t_3, 4t_1t_4, t_2t_3, 2t_2t_4, 0)$$

$$\mu(tC) = \frac{|t_1t_2|^2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + |2t_1t_3|^2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + |4t_1t_4|^2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + |t_2t_3|^2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + |2t_2t_4|^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}{|t_1t_2|^2 + |2t_1t_3|^2 + |4t_1t_4|^2 + |t_2t_3|^2 + |2t_2t_4|^2}$$

$$\lim_{t_1, t_2 = 1,\ t_3, t_4 \to 0} t.C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: C'$$

Afirmación C' es un punto fijo de la acción

$$t'.C' = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P.D. $t'.C' = C'$ como punto en $Gr_{2,4}$

$$C' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \in Gr_{2,4}$$

$$t'C' = \left\langle \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t_2' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \in Gr_{2,4} \qquad t_1, t_2 \neq 0 \quad //$$

$$pe(C') = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\mu(C') = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Vertices}(\Gamma_{\mu(C)})$$

Ejercicio: calcular los 4 otros puntos fijos que corresponden a vertices

Ejemplo: El matroide universal $M_{k,n} = ([n], \binom{[n]}{k})$ y su politopo matroide es el hipersimplejo: bases

$$\Delta_{k,n} = \operatorname{conv}\left\{ e_I : I \in \binom{[n]}{k} \right\}$$

Tenemos $\mu(Gr_{k,n}) = \Delta_{k,n}$

$Gr_{k,n}(\mathbb{C}) \supset Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \supset Gr_{k,n}^{\geq 0}$

Clasificación de piezas positroides de μ

Objetivo: Calcular la descomposición ϕ-inducida de $\Delta_{k,n}$ con $\phi = \mu$ $\quad X = Gr_{k,n}^{\geq 0} = \bigsqcup_{\pi \text{ perm. dec.}} S_\pi$

Observación: μ continua $\Rightarrow$ $\mu(\overline{S_\mu}) \subset \overline{\mu(S_\mu)}$

Teorema: [Tsukerman–Williams, Adv. Math. 2015]

μ positroide, entonces

$$\mu(\overline{S_\mu}) = \overline{\mu(S_\mu)}$$

Corolario:

$$\mu(Gr^{\geq 0}_{k,n}) = \mu(\overline{Gr^{>0}_{k,n}}) = \mu(\overline{S_{\mu_{k,n}}}) \overset{\text{Teorema}}{=} \overline{\mu(S_{\mu_{k,n}})} \underset{\text{Goresky et al}}{=} \Delta_{k,n}$$

Tenemos $\mu : Gr^{\geq}_{k,n} \longrightarrow \Delta_{k,n}$

Ejercicio: Dado las gráficas plabic

Calcula sus matroides a partir de emparejamientos perfectos y sus politopos positroide.

Recuerda: Una pieza positroide es $\overline{\mu(S_\pi)}$ t.q.

- μ es injectiva en S_π
- $\dim(\overline{\mu(S_\pi)}) = \dim \Delta_{k,n} = n-1$

Teorema TW $\Rightarrow$ $\overline{\mu(S_\pi)} = \Gamma_\pi$ politopo positroide

Estamos buscando politopos positroides Γ_π:

- $\mu|_{S_\pi}$ inyectiva
- $\dim \Gamma_\pi = \dim \Delta_{k,n}$

Proposición [Lukowski, Parisi, Williams IMRN 2023]
Sea $S_\mu \subset Gr_{k,n}^{\geq 0}$ una celda positroide. Entonces μ es un homeomorfismo entre $\overline{S_\mu}$ y Γ_μ
$\iff$ la gráfica plabic reducida asociada a μ es un bosque.

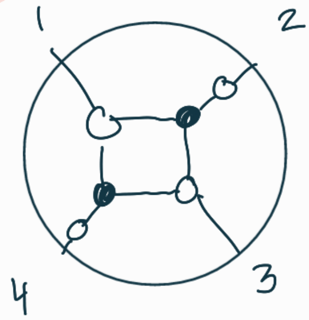
Las celdas $(n-1)$-dimensionals S_μ tal que μ es un homeomorfismo entre S_μ y $\mu(S_\mu)$ son aquellos con gráfica plabic reducida un arbol.

Ejemplo $n=4$, $k=2$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in S_G$$

$$pl(C) = (1,1,1,1,2,1)$$

$G =$



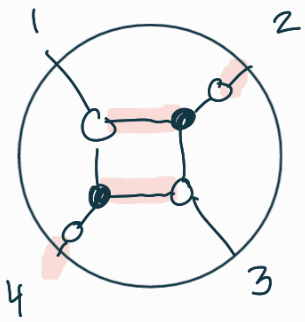
$$\mu(C) = \frac{\sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |p_I(C)|^2 e_I}{\sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |p_I(C)|^2}$$

$$\mu(C) = \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right)$$

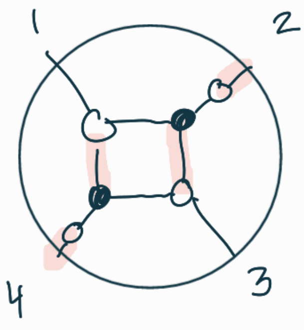
$$pl(t.C) = (t_1t_2,\ t_1t_3,\ t_1t_4,\ t_2t_3,\ 2t_2t_4,\ t_3t_4)$$

$$\mu(\overline{t.C}) = \Gamma_{\mu_{2,4}} = \Delta_{2,4}$$

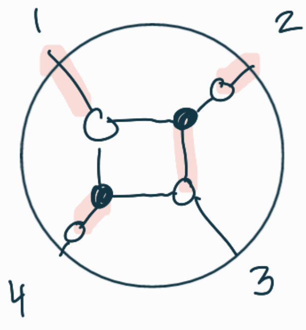
Calculamos el matroide de G



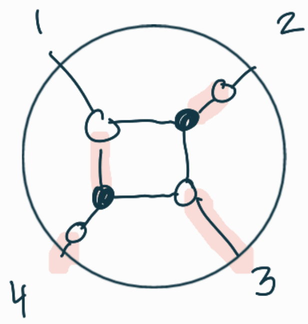
24 $\leftrightarrow$



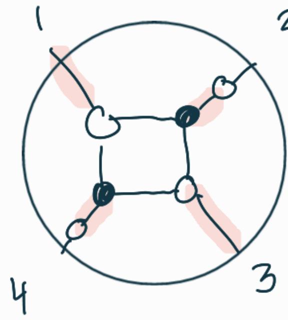
24



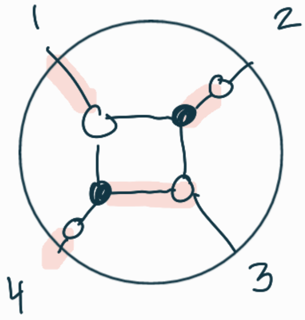
12



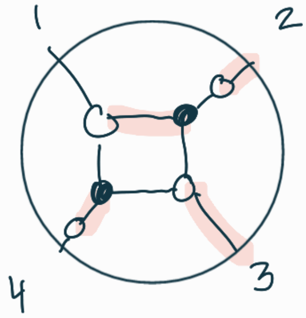
34



13



14



23

$\Rightarrow \quad \mu_G = \mu_{2,4}$

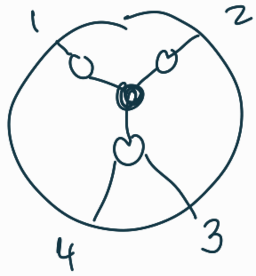
$S_G = Gr_{2,4}^{>0}$

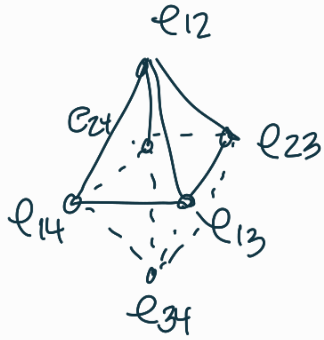
$\Rightarrow \quad \dim S_G = 4$

mientras $\quad \dim \Delta_{2,4} = 3$

$\Rightarrow \quad \mu$ no es inyectivo

En el ejercicio anterior van a ver

$G' =$  tiene politope positroide



y se puede verificar que μ es inyectiva en $S_{G'}$

Además, $\quad \dim S_{G'} = \#\{\text{caras de } G\} - 1 = 3$

$\Rightarrow \quad \dim S_{G'} = \dim \Gamma_G$

Proposición: Dos piezas positroides Γ_G y $\Gamma_{G'}$ son iguales $\Leftrightarrow$ G y G' son relacionados por movimientos de tipo (M2) & (M3)

(fusión y separación de vertices del mismo color

La Grassmanniana tropical positiva y subdivisiones positroidales

¿Cómo podemos producir teselaciones y subdivisiones de hipersimplejo?

Un poco de geometría tropical

Def: Sea $e = (e_1, \dots, e_N) \in \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ y $x^e = x_1^{e_1} \cdots x_N^{e_N}$
$E \subset \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ y $f = \sum_{e \in E} f_e x^e$ un polinomio

Definimos

$$\mathrm{Trop}(f) = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \begin{array}{l} \min\{ \sum_{i=1}^N e_i x_i : e \in E \} \\ \text{se obtiene más que una vez} \end{array} \right\}$$

se llama la hipersuperficie tropical asociada a f.

Ejemplo: $f = x_1 - x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3$ $\quad E = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$(3,1,1) \in \mathrm{Trop}^+(f)$ $\quad E^+ = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$\min\{ 3, 2+1, 2\cdot 3+1 \} = 3$ $\quad E^- = \left\{ \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$

se obtiene en dos términos

$(2,1,1) \notin \mathrm{Trop}(f)$
$\min\{2, 3, 5\} = 2$

solo se alcanza en un término

Def: Sea $E = E^+ \sqcup E^- \subset \mathbb{Z}^N_{\geq 0}$ y $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_N]$ de forma $f = \sum_{e \in E^+} f_e x^e - \sum_{e \in E^-} f_e x^e$ $\quad f_e \in \mathbb{R}_{>0} \ \forall e \in E$

Definimos la parte positiva de Trop(f)

$$\mathrm{Trop}^+(f) = \{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \min_{e \in E^+} \{ \sum e_i x_i \} = \min_{e \in E^-} \{ \sum e_i x_i \} \}$$

$\cap$
Trop(f)

Recuerda, $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\binom{n}{k}-1}$

encaje de Plücker.

Sea $I_{k,n} \subset \mathbb{R}[p_I : I \in \binom{[n]}{k}]$ el ideal de Plücker, es decir

$$\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{V}(I_{k,n}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{\binom{n}{k}-1}$$

$I_{k,n}$ contiene elementos de la siguiente forma

Sean $1 \leq a < b < c < d \leq n$ y $S \in \binom{[n]}{k-2}$, $S \cap \{a,b,c,d\} = \emptyset$

Notación $Sij = S \cup \{i,j\}$ $\forall\, i,j \in [n]$, $S \in \binom{[n]}{k-2}$

Definimos la relación de Plücker de 3 términos asociada a a,b,c,d,S

$$P_{Sac}P_{Sbd} = P_{Sab}P_{Scd} + P_{Sad}P_{Sbc}$$

Dado $P = (P_I)_I \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ decimos cumple esta relación de Plücker de 3 términos tropical si

$$P_{Sac} + P_{Sbd} = P_{Sab} + P_{Scd} \leq P_{Sad} + P_{Sbc}$$

$$P_{Sac} + P_{Sbd} = P_{Sad} + P_{Sbc} \leq P_{Sab} + P_{Scd}$$

$$P_{Sad} + P_{Sbc} = P_{Sab} + P_{Scd} \leq P_{Sac} + P_{Sbd}$$

Definición: La Grassmanniana tropical es

$$\mathrm{Trop}(I_{k,n}) = \bigcap_{f \in I_{k,n}} \mathrm{Trop}(f) \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$$

La Dressiana es $\mathrm{Dr}_{k,n} = \bigcap_{\substack{f \text{ relación} \\ \text{de Plücker de} \\ 3 \text{ términos}}} \mathrm{Trop}(f) \subset \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Ejercicio*: $I_{2,n}$ es generado por relaciones de Plücker de 3 términos

Fact: $\mathrm{Trop}(I_{2,n}) = Dr_{2,n}$

Ejemplo: $Gr_{3,6}$, $I_{3,6}$ es generado 30 relaciones de 3 términos $1 \le i < j < k < l \le n$ y $m \in [n] \setminus \{i,j,k,l\}$

$$P_{ijm}P_{klm} - P_{ikm}P_{jlm} + P_{ilm}P_{jkm}$$

y 6 relaciones de 4 términos, e.g.

$$P_{234}P_{156} - P_{134}P_{256} + P_{124}P_{356} - P_{123}P_{456}$$

y se puede verificar $\mathrm{Trop}(I_{3,6}) \neq Dr_{3,6}$

Utilizando el teorema fundamental de la geometría tropical:

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ el campo de series de Puisseux (series formales en t con exponentes reales acotados por la izquierda, es decir tienen un único término con exponente minimal)

$val_{\mathbb{K}}(cd) = val_{\mathbb{K}}(c) + val_{\mathbb{K}}(d)$
$val_{\mathbb{K}}(c+d) \geq \min\{val_{\mathbb{K}}(c), val_{\mathbb{K}}(d)\}$

$\mathbb{K}$ tiene una valuación $val_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\setminus\{0\} \to (\mathbb{R}, +, \min)$ definido en $c(t) = \sum_{\alpha_m \in \mathbb{R}} C_{\alpha_m} t^{\alpha_m} \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$

con $C_{\alpha_0} \neq 0$ coeficiente del término minimal

$$val_{\mathbb{K}}(c(t)) = C_{\alpha_0}$$

Teorema Fundamental (caso Grassmanniana)

$$\boxed{\mathrm{Trop}(I_{k,n}) = \left\{ P = (P_I)_I \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} : \begin{array}{l} \exists\, A = A(t) \in Gr_{k,n}(\mathbb{K}) \text{ t.q.} \\ P_I \overset{\star}{=} val_{\mathbb{K}}(P_I(A)) \end{array} \right\}}$$

matriz $k \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$
$\Rightarrow P_I(A) \in \mathbb{K}$

puntos $\mathrm{Trop}(I_{k,n})$ se llaman espacios lineales tropicales realizables *

en analogía $\left(\mathrm{Trop}(I_{k,n}) \subset Dr_{k,n}\right)$

puntos en $Dr_{k,n}$ se llaman espaciones lineales tropicales abstractos.

Def. La Grassmanniana tropical positiva es

$$\mathrm{Trop}^+(I_{k,n}) = \bigcap_{f \in I_{k,n}} \mathrm{Trop}^+(f)$$

La Dressiana positiva es

$$Dr^+_{k,n} = \bigcap_{\substack{f \text{ rel.} \\ \text{de Pl. de 3 tér.}}} \mathrm{Trop}^+(f)$$

Ejemplo: $Gr_{2,4} = V(p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23})$

$$\mathrm{trop}^+(I_{2,4}) = Dr^+_{2,4}$$

contiene puntos $(P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}) \in \mathbb{R}^6$ que satisfacen

(P1) $P_{12} + P_{34} = P_{13} + P_{24} \leq P_{14} + P_{23}$ o

(P2) $P_{13} + P_{24} = P_{14} + P_{23} \leq P_{12} + P_{34}$ o

$P_{12} + P_{34} = P_{14} + P_{23} \leq P_{13} + P_{24}$

Teorema [Speyer-Williams, [2003.10231]]

$$\mathrm{Trop}^+(I_{k,n}) = Dr^+_{k,n}$$

Puntos en $\mathrm{Dr}_{k,n}$ tienen interpretación como funciones altura en vértices de $\Delta_{k,n}$

$P=(P_I)_I \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ determina una función

$$\left\{ e_I : I \in \binom{[n]}{k} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$e_I \longmapsto P_I$$

y define un levantamiento de $\Delta_{k,n}$ a $\mathbb{R}^{n+1}$
$\mathbb{R}^n$

$$\Delta_{k,n}^{P} = \mathrm{conv}\left\{ (e_I, P_I) \in \mathbb{R}^{n+1} : I \in \binom{[n]}{k} \right\}$$

[Thomas - Lectures on Geometric combinatorics]

Cada levantamiento de $\Delta_{k,n}$ determina una subdivisión poliedral regular através de las caras inferiores de $\Delta_{k,n}^{P}$.

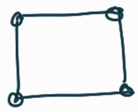
$F \subset \Delta_{k,n}^{P}$ cara es inferior si

$$\forall\ x \in F,\ \lambda > 0 \qquad x - \lambda e_{n+1} \notin \Delta_{k,n}^{P}$$

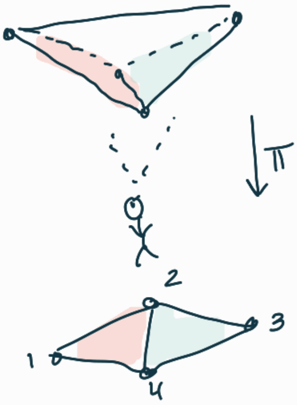
Consideramos $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \longmapsto (a_1, \dots, a_n)$$

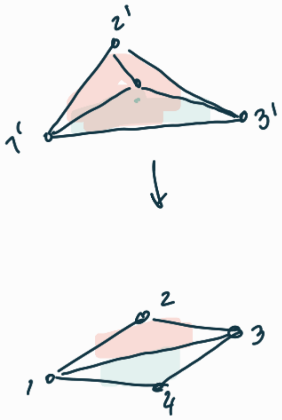
La subdivisión regular inducida por P es

$$\mathcal{D}_P = \bigcup_{\substack{F \subset \Delta_{k,n}^{P} \\ \text{cara inferior}}} \pi(F)$$

Ejemplo: Consideramos $\Delta =$  $\subset \mathbb{R}^2$

y dos levantamientos a $\mathbb{R}^3$:


π
1
2
3
4


1'
2'
3'
1
2
3
4