Curso "Álgebra conmutativa computacional" 2021

Lara Bossinger

Noviembre 2020

Una idea central en geometría algebraica y álgebra conmutativa es la de estudiar sistemas de ecuaciones polinomiales en varias variables. Desde el punto de vista computacional, encontrar soluciones explícitas para estos sistemas puede ser una tarea difícil. La teoría de las bases de Gröbner ayuda precisamente a encontrar soluciones a estos sistemas de manera algorítmica. En vista de la ubicuidad de problemas científicos modelados por ecuaciones polinomiales, este tema es de interés no solo para los matemáticos pero también para un número en ascenso de ingenieros y científicos. Más precisamente, sea J un ideal en el anillo de polinomios $k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre un campo k algebraicamente cerrado. Tomamos un orden total $\succ$ en los monomios de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Así podemos definir la *forma inicial* $\mathrm{in}_\succ(f)$ de un polinomio $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$: es el monomio máximal con respeto al orden. El *ideal inicial* $\mathrm{in}_\succ(J)$ es el ideal generado por las formas iniciales de todos los elemento en J. Una *base de Gröbner* para J con respeto a $\succ$ es un conjunto finito de generadores de J tales que sus formas iniciales generan al ideal inicial.

Ejemplo: Sea J el ideal generado por x^2+xy y y^3+x^2 en $k[x,y]$. Definimos el orden total: $x^ay^b \succ x^cy^d$ si y solo si $a \geq c$, o $a = c$ y $b > d$. Entonces, $\mathrm{in}_\succ(x^2+xy) = x^2$ y $\mathrm{in}_\succ(y^3+x^2) = x^2$. Pero el conjunto $\{x^2+xy, y^3+x^2\}$ no es una base de Gröbner, porque la forma inicial del elemento $xy - y^3 = (x^2+xy) - (y^3+x^2) \in J$ no se encuentra en el ideal generado por $\mathrm{in}_\succ(x^2+xy)$ y $\mathrm{in}_\succ(y^3+x^2)$. Una base de Gröber de J con respeto a $\succ$ es, por ejemplo, $\{y^3+x^2, x^2+xy, xy-y^3\}$.

En este curso vamos a tratar bases de Gröbner y sus aplicaciones en la geometría tropical con enfoque en los cálculos usando programas como `Macaulay2`. Eso necesariamente incluye el estudio de objetos geométricos como los abanicos de Gröbner que codifican información sobre el ideal y sus bases de Gröbner.

0.1 Temario

1. Pólipos, abanicos y poliedros (ver [Tho06, §2-3])
2. Bases y abanicos de Gröbner (ver [HH11, §2])
3. La tropicalización de un ideal (ver [BJS$^+$07] o también partes del libro [MS15])
4. Cálculos en `Macaulay2` (ver [GS])

0.2 Requisitos

Para seguir el curso es recomendable que los estudiantes estén familiarizados con las nociones básicas de las siguientes asignaturas

1. Álgebra moderna,
2. Álgebra conmutativa,
3. Geometría algebraica.

Outline of the course:

1. **Gröbner bases**
   (a) Monomial ideals:
      i. Basic properties [HH11, §1.1]
      ii. Algebraic operations [HH11, §1.2]
      iii. Primary decomposition [HH11, §1.3]
      iv. Monomial ideals in M2 [HS02]
      v. Squarefree monomial ideals and Simplicial Complexes [HH11, §1.5]
   (b) Gröbner bases:

i. Dickson's Lemma and Hilbert Basis Theorem [HH11, §2.1]
ii. Division Algorithm [HH11, §2.2]
iii. Buchberger's criterium [HH11, §2.3]
iv. Computations in M2

(c) Monomial orders and weights:

i. Initial Ideals with respect to weights [HH11, §3.1]
ii. Initial ideal as a special fiber of a flat family [HH11, §3.2]

2. **Polyhedral Geometry**

(a) Convex Polytopes [Tho06, §2]
(b) Faces of Polytopes [Tho06, §3]
(c) Triangulations of Point configurations [Tho06, §7]
(d) Secondary Polytope [Tho06, §8]
(e) Computations in polymake

3. **Gröbner fans**

(a) The State Polytope

i. Newton polytopes
ii. The state polytope [Stu95, §2]
iii. Algorithms [Stu95, §3]

(b) Toric ideals

i. Initial complexes of toric ideals [Tho06, §13]
ii. The state polytope for toric ideals [Tho06, §14]

4. **Tropicalization**

(a) Tropical Arithmetics [MS15, §1.1]
(b) Tropical Hypersurfices
(c) Tropicalizing Ideals

i. Algorithmic Problems and Tropcial Bases [BJS$^+$07, §2]
ii. Transversality and Conectivity [BJS$^+$07, §3]
iii. Algorithms [BJS$^+$07, §4]

(d) Toric degenerations
(e) Computations in M2

Semanas del semestre:

Febrero	1.	15/02/2021 - 19/02/2021
	2.	22/02/2021 - 26/02/2021
Marzo	3.	01/03/2021 - 05/03/2021
	4.	08/03/2021 - 12/03/2021
	5.	15/03/2021 - 19/03/2021
	6.	22/03/2021 - 26/03/2021
	7.	29/03/2021 - 01/04/2021 Semana santa
Abril	7.	05/04/2021 - 09/04/2021
	8.	12/04/2021 - 16/04/2021 ICERM-Workshop: Polyhedra in Algebraic Geometry
	9.	19/04/2021 - 23/04/2021
	10.	26/04/2021 - 30/04/2021
Mayo	12.	03/05/2021 - 07/05/2021
	13.	10/05/2021 - 14/05/2021
	14.	17/05/2021 - 21/05/2021
	15.	24/05/2021 - 28/05/2021
Junio	16.	31/05/2021 - 04/06/2021
	17.	07/06/2021 - 11/06/2021

References

[BJS$^+$07] T. Bogart, A. N. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels, and R. R. Thomas. Computing tropical varieties. *J. Symbolic Comput.*, 42(1-2):54–73, 2007.

[GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[HH11] Jürgen Herzog and Takayuki Hibi. *Monomial ideals*, volume 260 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[HS02] Hoşten, Serkan and Smith, Gregory G. *Monomial ideals*, Computations in algebraic geometry with Macaulay 2, pages 73–100, volume 8 of *Algorithms Comput. Math.* Springer, Berlin, 2002.

[MS15] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, volume 161 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[Stu95] Bernd Sturmfels *Gröbner bases and convex polytopes*, University Lecture Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[Tho06] Rekha R. Thomas. *Lectures in geometric combinatorics*, volume 33 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2006. IAS/Park City Mathematical Subseries.

1 Proyecto 1: La función de Hilbert y ideales iniciales

Sea K un campo y $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ una K-algebra graduada. Si R es finitamente generade y generade de R_1 se dice que R tiene *la graduación estandar.*

Ejemplo.

1. El anillo de polinomios $S := K[x_1, \ldots, x_n]$ con la graduación $\deg(x_i) = 1$ para todos los i es un ejemplo de una K-algebra con graduación estándar.
2. Si $I \subset S := K[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal homogéneo, entonces S/I es graduado.

Sea M un R-modulo finitamente generado y graduado. Las conponentes graduadas de M son M_i. Un elemente $x \in M$ es *homogeneo* si existe un i tal que $x \in M_i$. Además cada $x \in M$ tiene una representación única $x = \sum_{j=1}^{s} x_{i_j}$ con $x_{i_j} \in M_{i_j}$.

Definición. ([HH11, Definition 6.1.1]) La función $H(M, -) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con

$$H(M, i) := \dim_K(M_i)$$

se llama *la función de Hilbert de M*. La serie $H_M(t) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} H(M, i)t^i \in \mathbb{Z}[t^{\tilde{}pm1}]$ se llama *la serie de Hilbert*.

Ejemplo. Para $M = S$ los monomios de grado i son una base de S_i. Para calcular $H(S, i)$ tenemos que contar entonces el número de monomios de grado i. Un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ se puede representar de una secuencia de puntos $\cdot$ y líneas $|$ de la siguiente manera:

- empezando con x_1 dibujamos a_1 puntos;
- después dibujamos una linea antes de dibujar los puntos que representan a_2, etc.

Por ejemplo, para $x_1^2 x_2 x_4 \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ dibujamos:

$$\cdot\cdot|\cdot||\cdot$$

Cada secuencia que represente un monomio de grado i consiste de i puntos y $n-1$ lineas. Las posiciones de las $n-1$ línes determinan de manera ùnica la secuencia. Igualmente las posiciones de los i puntos determinan de manera única la secuencia. Entonces contamos

$$H(S, i) = \binom{n+i-1}{n-1} = \binom{n+i-1}{i}.$$

Teorema. (Teorema de Hilbert, e.g. [HH11, Theorem 6.1.3]) Sea K un campo, R una K-algebra con graduación estandar y M un R-modulo finitamente generado y graduado de dimensión d.

1. Existe un polinomio de Laurent $Q_M(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ con $Q_M(1) > 0$ tal que
$$H_M(t) = \frac{Q_M(t)}{(1-t)^d}.$$
2. Existe un polinomio $P_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado $d-1$ tal que
$$H(M, i) = P_M(i), \quad \text{para todos } i > \deg(Q_M) - d.$$
El polinomio $P_M(x)$ se llama *el polinomio de Hilbert* de M.

El polinomio de Hilbert es una invariante importante en familias planas. En particular es una invariante en las familias planas de un parámetro que vimos en la clase del 19/03/2021.

Corolario. ([HH11, Corollary 6.1.5 y 6.1.6]) Sea $I \subset S$ un ideal homogeneo y $<$ un orden monomial en S.

1. Las algebras S/I y $S/in_<(I)$ tienen la misma función de Hilbert, es decir $H(S/I, i) = H(S/in_<(I), i)$ para todos $i \in \mathbb{Z}$.
2. Si $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ es un sistema de generadores para I y $J := (in_<(g_1), \ldots, in_<(g_s))$ tenemos
$$G \text{ es una } <\text{-base de Gröbner de } I \Leftrightarrow H_{S/I}(t) = H_{S/J}(t).$$

Si I es un ideal monomial libre de cuadrados la función de Hilbert de S/I se puede calcular de manera combinatoria. Recuerda la §1.5 de [HH11] que vimos el 22/02/2021.

Sea Δ un complejo simplicial en $[n]$ de dimensión $d-1$. Su *ideal de Stanley–Reisner* es el ideal monomial libre de cuadrados

$$I_\Delta := (\mathbf{x}^F : F \text{ no es cara de } \Delta) \subset S,$$

donde $\mathbf{x}^F$ es el monomio con exponente 1 para los x_i con $i \in F$ y exponente cero para los x_j con $j \notin F$. El cociente $S/I_\Delta =: K[\Delta]$ se llama el *anillo de Stanley–Reisner de* Δ. Definimos el *f-vector* de Δ:

$$f(\Delta) = (f_0, \ldots, f_{d-1})$$

con f_i el número de caras de dimensión i de Δ. Fijamos $f_{-1} := 1$. El *h-vector* es $h(\Delta) = (h_0, \ldots, h_d)$ que cumple

$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(t-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i t^{d-i}.$$

Proposición. ([HH11, Proposition 6.2.1]) Sea Δ un complejo simplicial en $[n]$ de dimensión $d-1$. Tenemos

$$H_{K[\Delta]}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{d} h_i t^i}{(1-t)^d}.$$

Sea $I \subset S$ un ideal arbitrario. Supongamos que existe un orden monomial $<$ en S tal que $in_<(I)$ es un ideal monomial libre de cuadrados. Entonces existe un complejo simplicial en $[n]$ tal que $I_\Delta = in_<(I)$ (ver §1.5.2). En este caso podemos calcular $H_{S/I}(t) = H_{K[\Delta]}(t)$ a través del h-vector de Δ.

El objetivo de este proyecto es realizar dicho calculo para el siguiente ideal: en $S = K[x_1, \ldots, x_6]$ definimos el ideal J generado de las seis elementos:

$$\begin{cases} x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2 - 1, & \text{para } i = 1 \mod 2, \\ x_i x_{i+2} - x_{i+1} - 1, & \text{para } i = 0 \mod 2, \end{cases}$$

donde todos los índices se tomas de $\mathbb{Z}_6$, es decir $7 = 1, 8 = 2, \ldots$ El ideal $I \subset S$ es el radical de J.

1. calcula un conjunto de generadores de I usando Macaulay2 (define el ideal J y calcula su radical);
2. da un peso $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^6$ tal que $in_w(I)$ es monomial y libre de cuadrados (Tip: los monomios $x_i x_{i+2}$ para todos $i \in \mathbb{Z}_6$ deberian ser elementos en $in_w(I)$);
3. calcula el complejo simplicial Δ que cumple $I_\Delta = in_w(\Delta)$ (se obtiene del conjunto de generadores de $in_w(I)$);
4. calcula los f- y h-vectores de Δ.

El ideal I es el primero en una familia que es de interés por su relación con las álgebras de conglomerado.

Como preparación es deseable leer y entender los capítulos §6.1 y §6.2 de [HH11]. Al final los resultados deberían ser presentados el 4/06/2021 o el 11/06/2021.

References

[GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[HH11] Jürgen Herzog and Takayuki Hibi. *Monomial ideals*, volume 260 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.