Curso: degeneraciones tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

agosto 16 2022

§1.1: Equivalencia de las construcciones

La última vez vimos tres construcciones de variedades afines tóricas

1. Puntos en una latiz: $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ define

$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s, \ t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

y $Y_{\mathcal{A}}$ es la cerradura del imagen de $\Phi_{\mathcal{A}}$.

§1.1: Equivalencia de las construcciones

La última vez vimos tres construcciones de variedades afines tóricas

1. Puntos en una latiz: $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$ define

$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s, \ t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$$

   y $Y_{\mathcal{A}}$ es la cerradura del imagen de $\Phi_{\mathcal{A}}$.

2. Ideales tóricos: sea $0 \to L \to \mathbb{Z}^s \stackrel{\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}}{\to} M$ una secuencia exacta, pues

$$I(Y_{\mathcal{A}}) = (x^{\alpha} - x^{\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s].$$

§1.1: Equivalencia de las construcciones

La última vez vimos tres construcciones de variedades afines tóricas

1. Puntos en una latiz: $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ define
$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s, \ t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$
y $Y_{\mathcal{A}}$ es la cerradura del imagen de $\Phi_{\mathcal{A}}$.
2. Ideales tóricos: sea $0 \to L \to \mathbb{Z}^s \stackrel{\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}}{\to} M$ una secuencia exacta, pues
$$I(Y_{\mathcal{A}}) = (x^\alpha - x^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s].$$
3. Semigrupos afines: sea $\mathrm{S} = \mathbb{N}\mathcal{A}$ un semigrupo afín y $\mathbb{C}[\mathrm{S}]$ el álgebra del semigrupo. Entonces,
$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S}]) = Y_{\mathcal{A}}.$$

La acción de T_N en $\mathbb{C}[M]$

T_N como grupo abeliano actua en si mismo por la multiplicación. Como variedad afín la acción induce una acción en su anillo de coordenadas $\mathbb{C}[M]$: para $t \in T_N$ y $f \in \mathbb{C}[M]$ la función $t \cdot f \in \mathbb{C}[M]$ se define

$$p \mapsto f(t^{-1} \cdot p).$$

Es un ejercicio verificar porque se define de esta manera.

La acción de T_N en $\mathbb{C}[M]$

T_N como grupo abeliano actua en si mismo por la multiplicación. Como variedad afín la acción induce una acción en su anillo de coordenadas $\mathbb{C}[M]$: para $t \in T_N$ y $f \in \mathbb{C}[M]$ la función $t \cdot f \in \mathbb{C}[M]$ se define

$$p \mapsto f(t^{-1} \cdot p).$$

Es un ejercicio verificar porque se define de esta manera.

Lema (Lema 1.1.16)

Sea $A \subset \mathbb{C}[M]$ un subespacio estable con respecto a la acción de T_N. Entonces,

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Prueba del Lema 1.1.16

Toma $A' = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m$ y nota que $A' \subset A$. Para la otra inclusión sea $f \in A$ no cero. Como $A \subset \mathbb{C}[M]$ que tiene base $\{\chi^m : m \in M\}$ podemos escribir

$$f = \sum_{m \in \mathcal{B}} c_m \chi^m$$

donde $\mathcal{B} \subset M$ es un conjunto finito y $c_m \in \mathbb{C} - \{0\}$ para todos $m \in \mathcal{B}$.

Prueba del Lema 1.1.16

Toma $A' = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m$ y nota que $A' \subset A$. Para la otra inclusión sea $f \in A$ no cero. Como $A \subset \mathbb{C}[M]$ que tiene base $\{\chi^m : m \in M\}$ podemos escribir

$$f = \sum_{m \in \mathcal{B}} c_m \chi^m$$

donde $\mathcal{B} \subset M$ es un conjunto finito y $c_m \in \mathbb{C} - \{0\}$ para todos $m \in \mathcal{B}$.Entonces, $f \in B \cap A$ para $B \subset \mathbb{C}[M]$ el subespacio generado por $\{\chi^m : m \in \mathcal{B}\}$. Tenemos para $p \in T_N$

$$t \cdot \chi^m(p) = \chi^m(t^{-1} \cdot p) = \chi^m(t^{-1})\chi^m(p).$$

Continuación: Prueba del Lema 1.1.16

En particular, $T_N \cdot \chi^m \subset B$ para $\chi^m \in B$ pues $B \cap A$ es estable bajo la acción de T_N.

Continuación: Prueba del Lema 1.1.16

En particular, $T_N \cdot \chi^m \subset B$ para $\chi^m \in B$ pues $B \cap A$ es estable bajo la acción de T_N.
Como $B \cap A$ es de dimensión finita (justo $|\mathcal{B}|$) aplica la Proposición 1.1.2:

$B \cap A$ es una suma directa de eigenvectores simultaneos de T_N.

Continuación: Prueba del Lema 1.1.16

En particular, $T_N \cdot \chi^m \subset B$ para $\chi^m \in B$ pues $B \cap A$ es estable bajo la acción de T_N.
Como $B \cap A$ es de dimensión finita (justo $|\mathcal{B}|$) aplica la Proposición 1.1.2:

$B \cap A$ es una suma directa de eigenvectores simultaneos de T_N.

Pero $A \cap B \subset \mathbb{C}[M]$ donde eigenvectores simultaneos de T_N son los caracteres.

Continuación: Prueba del Lema 1.1.16

En particular, $T_N \cdot \chi^m \subset B$ para $\chi^m \in B$ pues $B \cap A$ es estable bajo la acción de T_N.
Como $B \cap A$ es de dimensión finita (justo $|\mathcal{B}|$) aplica la Proposición 1.1.2:

$B \cap A$ es una suma directa de eigenvectores simultaneos de T_N.

Pero $A \cap B \subset \mathbb{C}[M]$ donde eigenvectores simultaneos de T_N son los caracteres.

Por lo tanto $B \cap A$ es una suma directa de caracteres. La expresión de $f \in B \cap A$

$$f = \sum_{m \in \mathcal{B}} c_m \chi^m$$

implica que $\chi^m \in A$ entonces $A \subset A'$. ■

Teorema principal

Teorema (Teorema 1.1.17)

Sea V una variedad afín. Entonces las siguientes afirmaciones con equivalentes:

1. V es una variedad tórica afín según la Definición 1.1.3 (contiene un toro denso cuyo acción extiende).

Teorema principal

Teorema (Teorema 1.1.17)

Sea V una variedad afín. Entonces las siguientes afirmaciones con equivalentes:

1. V es una variedad tórica afín según la Definición 1.1.3 (contiene un toro denso cuyo acción extiende).
2. $V = Y_{\mathcal{A}}$ para un conjunto finito en una latiz $\mathcal{A} \subset M$.

Teorema principal

Teorema (Teorema 1.1.17)

Sea V una variedad afín. Entonces las siguientes afirmaciones con equivalentes:

1. V es una variedad tórica afín según la Definición 1.1.3 (contiene un toro denso cuyo acción extiende).
2. $V = Y_{\mathcal{A}}$ para un conjunto finito en una latiz $\mathcal{A} \subset M$.
3. V es una variedad afín definida por un ideal tórico.

Teorema principal

Teorema (Teorema 1.1.17)

Sea V una variedad afín. Entonces las siguientes afirmaciones con equivalentes:

1. V es una variedad tórica afín según la Definición 1.1.3 (contiene un toro denso cuyo acción extiende).
2. $V = Y_{\mathcal{A}}$ para un conjunto finito en una latiz $\mathcal{A} \subset M$.
3. V es una variedad afín definida por un ideal tórico.
4. $V = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S}])$ para S un semigrupo afín.

Teorema principal

Teorema (Teorema 1.1.17)

Sea V una variedad afín. Entonces las siguientes afirmaciones con equivalentes:

1. V es una variedad tórica afín según la Definición 1.1.3 (contiene un toro denso cuyo acción extiende).
2. $V = Y_{\mathcal{A}}$ para un conjunto finito en una latiz $\mathcal{A} \subset M$.
3. V es una variedad afín definida por un ideal tórico.
4. $V = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S}])$ para S un semigrupo afín.

Prueba: Ya vimos (2) $\Leftrightarrow$ (3) en la Proposición 1.1.9, (2) $\Leftrightarrow$ (4) en la Proposición 1.1.14 y (2) $\Rightarrow$ (1) en la Proposición 1.1.8. Basta con verificar (1) $\Rightarrow$ (4).

Prueba del Teorema principal

Sea V una variedad afín tórica que contiene el toro T_N de la misma dimensión y cuya latiz de caracteres es M. El anillo de coordenadas de T_N es $\mathbb{C}[M]$ por lo tanto la inclusión $T_N \subset V$ nos da

$$\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[M].$$

Prueba del Teorema principal

Sea V una variedad afín tórica que contiene el toro T_N de la misma dimensión y cuya latiz de caracteres es M. El anillo de coordenadas de T_N es $\mathbb{C}[M]$ por lo tanto la inclusión $T_N \subset V$ nos da

$$\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[M].$$

Este mapeo es inyectivo (porque T_N es denso en V) y así podemos ver $\mathbb{C}[V]$ como un subalgebra de $\mathbb{C}[M]$.

Prueba del Teorema principal

Sea V una variedad afín tórica que contiene el toro T_N de la misma dimensión y cuya latiz de caracteres es M. El anillo de coordenadas de T_N es $\mathbb{C}[M]$ por lo tanto la inclusión $T_N \subset V$ nos da

$$\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[M].$$

Este mapeo es inyectivo (porque T_N es denso en V) y así podemos ver $\mathbb{C}[V]$ como un subalgebra de $\mathbb{C}[M]$.

La acción de T_N es V es definida por un morfismo $T_N \times V \to V$ por lo tanto $p \mapsto f(t^{-1} \cdot p)$ con $t \in T_N, p \in V$ y $f \in \mathbb{C}[V]$ define una acción de T_N en $\mathbb{C}[V]$. En particular, $\mathbb{C}[V] \subset \mathbb{C}[M]$ es estable bajo la acción de T_N.

Prueba del Teorema principal

Sea V una variedad afín tórica que contiene el toro T_N de la misma dimensión y cuya latiz de caracteres es M. El anillo de coordenadas de T_N es $\mathbb{C}[M]$ por lo tanto la inclusión $T_N \subset V$ nos da

$$\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[M].$$

Este mapeo es inyectivo (porque T_N es denso en V) y así podemos ver $\mathbb{C}[V]$ como un subalgebra de $\mathbb{C}[M]$.

La acción de T_N es V es definida por un morfismo $T_N \times V \to V$ por lo tanto $p \mapsto f(t^{-1} \cdot p)$ con $t \in T_N, p \in V$ y $f \in \mathbb{C}[V]$ define una acción de T_N en $\mathbb{C}[V]$. En particular, $\mathbb{C}[V] \subset \mathbb{C}[M]$ es estable bajo la acción de T_N.

Entonces, el Lema 1.1.16 implica

$$\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{\chi^m \in \mathbb{C}[V]} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

En particular, $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[\mathrm{S}]$ donde $\mathrm{S} = \{m \in M : \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$ es un semigrupo.

Continuación: Prueba del Teorema principal

Falta mostrar que S es afín. Más precisamente solo nos falta mostrar que es finitamente generado ya que es conmutativo y en una latíz.

Continuación: Prueba del Teorema principal

Falta mostrar que S es afín. Más precisamente solo nos falta mostrar que es finitamente generado ya que es conmutativo y en una latíz.

Recuerda que $\mathbb{C}[V]$ es finitamente generado. Sean $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[V]$ un conjunto de generadores. Expresamos cada f_i en términos de caracteres. Los caracteres que aparecen dan un conjunto finito de generadores para S.
■

Continuación: Prueba del Teorema principal

Falta mostrar que S es afín. Más precisamente solo nos falta mostrar que es finitamente generado ya que es conmutativo y en una latíz.

Recuerda que $\mathbb{C}[V]$ es finitamente generado. Sean $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[V]$ un conjunto de generadores. Expresamos cada f_i en términos de caracteres. Los caracteres que aparecen dan un conjunto finito de generadores para S. ■

Una consecuencia de la prueba es la siguiente caracterización de variedades tóricas afines:

Una variedad afín V que contiene un toro T_N de manera densa es tórica si y solo si las funciones de T_N que se extienden a V son determinadas por los caracteres que se extienden.

Ejemplo

Recuerda la variedad tórica afín $V(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$. Vimos que su toro es $(\mathbb{C}^*)^3$ encajado

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}).$$

Ejemplo

Recuerda la variedad tórica afín $V(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$. Vimos que su toro es $(\mathbb{C}^*)^3$ encajado

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}).$$

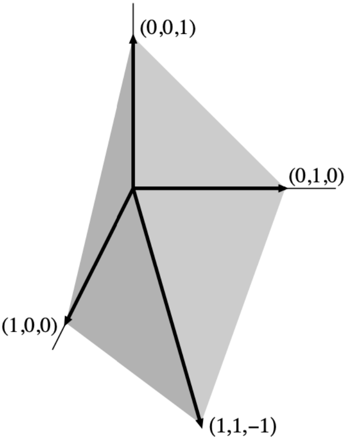
Este mapeo es de forma $\Phi_{\mathcal{A}}$, cada coordinada del imagen corresponde a un punto en una latiz $\mathbb{Z}^3$ que son las columnas de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El semigrupo $\mathrm{S} \subset \mathbb{Z}^3$ es generado de las columnas (sus elementos son $\mathbb{N}$-combinaciones de ellas).

Continuación: Ejemplo

Los elementos de S se pueden caracterizar de manera equivalente como los puntos enteros del cono en $\mathbb{R}^3$:



§1.2: Conos conexos poliedrales

Un **cono convexo poliedral** en $N_R := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ es un conjunto

$$\sigma = Cono(S) = \left\{ \sum_{u \in S} u\lambda_u : \lambda_u \geq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

donde $S \subset N_{\mathbb{R}}$ es un conjunto finito. Se dice que σ es **generado por** S. Fijamos $Cono(\varnothing) = \{0\}$.

§1.2: Conos conexos poliedrales

Un **cono convexo poliedral** en $N_R := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ es un conjunto

$$\sigma = Cono(S) = \left\{ \sum_{u \in S} u\lambda_u : \lambda_u \geq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

donde $S \subset N_{\mathbb{R}}$ es un conjunto finito. Se dice que σ es **generado por** S. Fijamos $Cono(\varnothing) = \{0\}$.

1. Convexo: $x, y \in \sigma \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \sigma \ \forall 0 \leq \lambda \leq 1$;

§1.2: Conos conexos poliedrales

Un **cono convexo poliedral** en $N_R := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ es un conjunto

$$\sigma = Cono(S) = \left\{ \sum_{u \in S} u\lambda_u : \lambda_u \geq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

donde $S \subset N_{\mathbb{R}}$ es un conjunto finito. Se dice que σ es **generado por** S. Fijamos $Cono(\varnothing) = \{0\}$.

1. Convexo: $x, y \in \sigma \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in \sigma \ \forall 0 \leq \lambda \leq 1$;
2. Cono: $x \in \sigma \Rightarrow \lambda x \in \sigma \ \forall \lambda \geq 0$.

Todos los conos que consideramos son convexos, por lo tanto los vamos a llamar más corto **conos poliedrales**.

Politopos

Un **politopo** en $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ es un conjunto de forma

$$P = Conv(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u : \lambda_u \geq 0, \sum_{u \in S} \lambda_u = 1 \right\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

donde $S \subset N_{\mathbb{R}}$ es un conjunto finito. Se dice que P es la **envolvente convexa de** S.

Politopos

Un **politopo** en $\mathbb{N}_\mathbb{R}$ es un conjunto de forma

$$P = Conv(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u : \lambda_u \geq 0, \sum_{u \in S} \lambda_u = 1 \right\} \subset N_\mathbb{R}$$

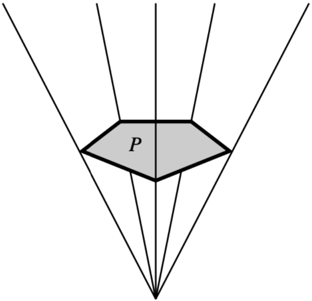
donde $S \subset N_\mathbb{R}$ es un conjunto finito. Se dice que P es la **envolvente convexa de** S.

Cada politopo P define un cono $C(P)$ llamado el **cono de** P:

$$C(P) = \{\lambda(1, u) \in \mathbb{R} \times N_\mathbb{R} : u \in P, \lambda \geq 0\}$$

Si $P = Conv(S)$ escirbimos $C(P) = Cono(\{1\} \times S)$.

Politopos



El cono $C(P) \subset \mathbb{R}^3$ de un pentágono P en $\mathbb{R}^2$.

Conos duales

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral. Su **cono dual** es

$$\sigma^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma\}$$

Tenemos $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$.

Conos duales

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral. Su **cono dual** es

$$\sigma^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma\}$$

Tenemos $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$. Para $m \in M_{\mathbb{R}}$ no cero definimos el hiperplano

$$H_m := \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle = 0\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

y los semiespacio cerrado en $N_{\mathbb{R}}$

$$H_m^+ := \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0\}, \quad \text{y} \quad H_m^- := \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \leq 0\}$$

Conos duales

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral. Su **cono dual** es

$$\sigma^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma\}$$

Tenemos $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$. Para $m \in M_{\mathbb{R}}$ no cero definimos el hiperplano

$$H_m := \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle = 0\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

y los semiespacio cerrado en $N_{\mathbb{R}}$

$$H_m^+ := \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq 0\}, \quad \text{y} \quad H_m^- := \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \leq 0\}$$

H_m es un **hiperplano de soporte** de σ si $\sigma \subset H_m^+$. Si $\sigma^{\vee}$ es generado de $m_1, \dots, m_s$ se verifica que

$$\sigma = H_{m_1}^+ \cap \cdots \cap H_{m_s}^+.$$

En particular, cada cono poliedral es la intersección de un número finito de semiespacios cerrados.

Conos duales

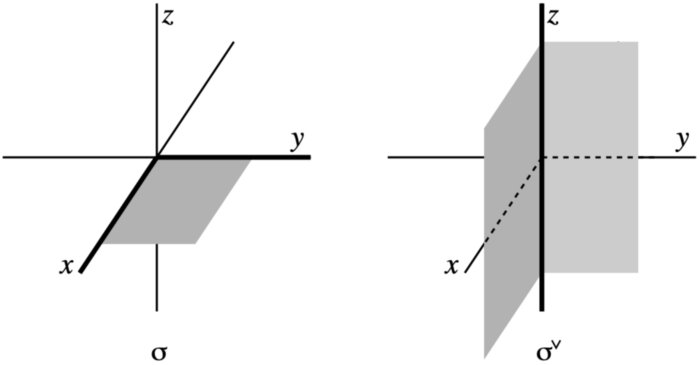


Figure 5. A 2-dimensional cone $\sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ and its dual $\sigma^\vee \subseteq \mathbb{R}^3$

Caras de conos

Una **cara** de un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es la intersección $\tau = \sigma \cap H_m$ para algún $m \in \sigma^{\vee}$. Escribirmos $\tau \preceq \sigma$. Para $m = 0$ tenemos $\tau = \sigma$, así que cada cono es una cara de si mismo. Si $\tau \neq \sigma$ decimos que es una cara propia.

Caras de conos

Una **cara** de un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es la intersección $\tau = \sigma \cap H_m$ para algún $m \in \sigma^{\vee}$. Escribirmos $\tau \preceq \sigma$. Para $m = 0$ tenemos $\tau = \sigma$, así que cada cono es una cara de si mismo. Si $\tau \neq \sigma$ decimos que es una cara propia.

Tenemos lo siguiente

1. Cada cara de un cono poliedral es un cono poliedral;
2. La intersección de dos caras es también una cara;
3. Una cara de una cara es también una cara.

Caras de conos

Una **cara** de un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es la intersección $\tau = \sigma \cap H_m$ para algún $m \in \sigma^{\vee}$. Escribirmos $\tau \preceq \sigma$. Para $m = 0$ tenemos $\tau = \sigma$, así que cada cono es una cara de si mismo. Si $\tau \neq \sigma$ decimos que es una cara propia.

Tenemos lo siguiente

1. Cada cara de un cono poliedral es un cono poliedral;
2. La intersección de dos caras es también una cara;
3. Una cara de una cara es también una cara.

Lo cual muestra que cada cono define un **complejo poliedral** de conos poliedrales (i.e. un **abanico**).

Facetas de conos

Una cara de codimensión uno, i.e. $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, es una **faceta**. Facetas tienen las siguientes propiedades:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un cono poliedral

1. Si $\sigma = H_{m_1}^{+} \cap \cdots \cap H_{m_s}^{+}$ entonces $\sigma^{\vee} = Cono(m_1, \ldots, m_s)$.

Facetas de conos

Una cara de codimensión uno, i.e. $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, es una **faceta**.
Facetas tienen las siguientes propiedades:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un cono poliedral

1. Si $\sigma = H^+_{m_1} \cap \cdots \cap H^+_{m_s}$ entonces $\sigma^\vee = Cono(m_1, \dots, m_s)$.
2. Si $\dim \sigma = n$ podemos suponer en (1) que $\tau_i = H_{m_i} \cap \sigma$ son facetas.

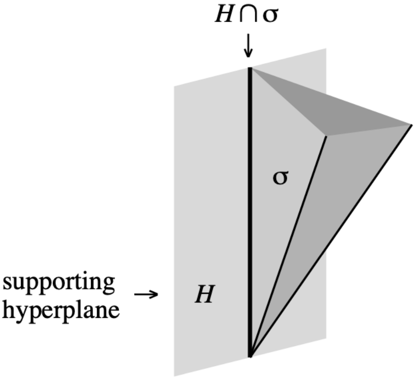
Facetas de conos

Una cara de codimensión uno, i.e. $\dim \tau = \dim \sigma - 1$, es una **faceta**. Facetas tienen las siguientes propiedades:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un cono poliedral

1. Si $\sigma = H_{m_1}^+ \cap \cdots \cap H_{m_s}^+$ entonces $\sigma^\vee = Cono(m_1, \ldots, m_s)$.
2. Si $\dim \sigma = n$ podemos suponer en (1) que $\tau_i = H_{m_i} \cap \sigma$ son facetas.
3. Cada cara propia $\tau \prec \sigma$ es la intersección de las facetas de σ que contienen a τ.

Facetas de conos



Conos estrictamente convexos

La clase más interessante de conos con respecto a la geometría tórica son los **conos estrictamente convexos** los cuales se pueden definir de una de la siguientes maneras equivalentes:

Conos estrictamente convexos

La clase más interessante de conos con respecto a la geometría tórica son los **conos estrictamente convexos** los cuales se pueden definir de una de la siguientes maneras equivalentes:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral. Entonces σ es estrictamente convexo si y solo si

1. $\{0\}$ es una cara de σ,

Conos estrictamente convexos

La clase más interessante de conos con respecto a la geometría tórica son los **conos estrictamente convexos** los cuales se pueden definir de una de la siguientes maneras equivalentes:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral. Entonces σ es estrictamente convexo si y solo si

1. $\{0\}$ es una cara de σ,
2. σ no contiene ningún subespacio de dimensión positiva de $N_{\mathbb{R}}$,

Conos estrictamente convexos

La clase más interessante de conos con respecto a la geometría tórica son los **conos estrictamente convexos** los cuales se pueden definir de una de la siguientes maneras equivalentes:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral. Entonces σ es estrictamente convexo si y solo si

1. $\{0\}$ es una cara de σ,
2. σ no contiene ningún subespacio de dimensión positiva de $N_{\mathbb{R}}$,
3. $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$,

Conos estrictamente convexos

La clase más interessante de conos con respecto a la geometría tórica son los **conos estrictamente convexos** los cuales se pueden definir de una de la siguientes maneras equivalentes:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral. Entonces σ es estrictamente convexo si y solo si

1. $\{0\}$ es una cara de σ,
2. σ no contiene ningún subespacio de dimensión positiva de $N_{\mathbb{R}}$,
3. $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$,
4. $\dim \sigma^{\vee} = n$.

Conos racionales

Un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es **racional** si $\sigma = Cono(S)$ para algún conjunto $S \subset N$ finito.

Conos racionales

Un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es **racional** si $\sigma = Cono(S)$ para algún conjunto $S \subset N$ finito.

Conos racional poliedral estrictamente convexos tienen un conjunto canónico de generadores: sea ρ una **arista** (cara de dimensión uno).

Conos racionales

Un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es **racional** si $\sigma = Cono(S)$ para algún conjunto $S \subset N$ finito.

Conos racional poliedral estrictamente convexos tienen un conjunto canónico de generadores: sea ρ una **arista** (cara de dimensión uno).

- Si σ es estrictamente convexo ρ es un **rayo**, es decir una semi-linea.

Conos racionales

Un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es **racional** si $\sigma = Cono(S)$ para algún conjunto $S \subset N$ finito.

Conos racional poliedral estrictamente convexos tienen un conjunto canónico de generadores: sea ρ una **arista** (cara de dimensión uno).

- Si σ es estrictamente convexo ρ es un **rayo**, es decir una semi-linea.
- Si σ es racional, también ρ es racional y por lo tanto el semigrupo $\rho \cap N$ tiene un generador único $u_\rho \in \rho \cap N$ llamado el **generador del rayo** o **generador minimal**.

Tenemos lo siguiente:

Conos racionales

Un cono poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es **racional** si $\sigma = Cono(S)$ para algún conjunto $S \subset N$ finito.

Conos racional poliedral estrictamente convexos tienen un conjunto canónico de generadores: sea ρ una **arista** (cara de dimensión uno).

- Si σ es estrictamente convexo ρ es un **rayo**, es decir una semi-linea.
- Si σ es racional, también ρ es racional y por lo tanto el semigrupo $\rho \cap N$ tiene un generador único $u_\rho \in \rho \cap N$ llamado el **generador del rayo** o **generador minimal**.

Tenemos lo siguiente:

Cada cono poliedral racional estrictamente convexo es generado por los generadores de sus rayos.

Conos racionales

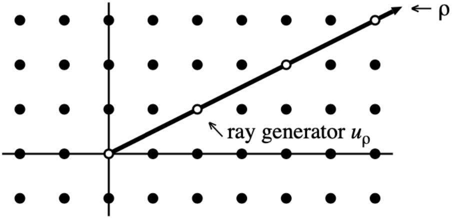


Figure 6. A rational ray $\rho \subseteq \mathbb{R}^2$ and its unique ray generator u_ρ

Conos suaves y simpliciales

Los siguientes dos clases de conos estrictamente convexos juegan un papel importante en la geometría tórica:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono polieadral racional estrictamente convexo

1. σ es **suave** si sus generadores minimales en N se extienden a una base de N.

Conos suaves y simpliciales

Los siguientes dos clases de conos estrictamente convexos juegan un papel importante en la geometría tórica:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono polieadral racional estrictamente convexo

1. σ es **suave** si sus generadores minimales en N se extienden a una base de N.
2. σ es **simplicial** si sus generadores minimales son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Conos suaves y simpliciales

¿Es el cono σ de la imagen suave o simplicial?

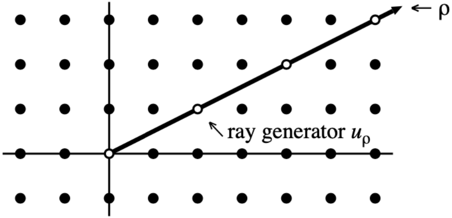


Figure 6. A rational ray $\rho \subseteq \mathbb{R}^2$ and its unique ray generator u_ρ

Conos suaves y simpliciales

¿Es el cono σ de la imagen suave o simplicial?

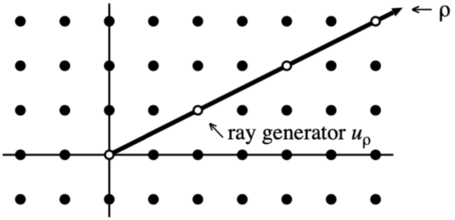


Figure 6. A rational ray $\rho \subseteq \mathbb{R}^2$ and its unique ray generator u_ρ

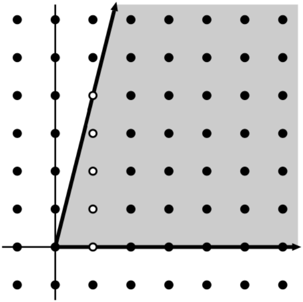
Solución: Calcula la determinante de la matriz de generarodes minimales:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Entonces, sí, σ es suave.

Conos suaves y simpliciales

¿Es el cono σ de la imagen suave o simplicial?



Conos y variedades tóricas afines

Dado un cono racional poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ definimos el semigrupo de sus puntos enteros

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M \subset M.$$

Conos y variedades tóricas afines

Dado un cono racional poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ definimos el semigrupo de sus puntos enteros

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M \subset M.$$

Lema de Gordon: S_σ es finitamente generado, por lo tanto S_σ es un semigrupo afín.

Conos y variedades tóricas afines

Dado un cono racional poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ definimos el semigrupo de sus puntos enteros

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M \subset M.$$

Lema de Gordon: S_σ es finitamente generado, por lo tanto S_σ es un semigrupo afín.

Teorema (Teorema 1.2.18)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un cono poliedral racional con semigrupo $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Entonces,

$$U_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

es una variedad afín tórica.

Conos y variedades tóricas afines

Dado un cono racional poliedral $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ definimos el semigrupo de sus puntos enteros

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M \subset M.$$

Lema de Gordon: S_σ es finitamente generado, por lo tanto S_σ es un semigrupo afín.

Teorema (Teorema 1.2.18)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un cono poliedral racional con semigrupo $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Entonces,

$$U_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

es una variedad afín tórica. Además, $\dim U_\sigma = n$ si y solo si el toro de U_σ es T_N lo cual es el caso si y solo si σ es estrictamente convexo.

Prueba del Teorema 1.2.18

El Lema de Gordon implica que U_σ es una variedad tórica afín cuya latiz de caracteres es $\mathbb{Z}S_\sigma \subset M$. Nota que

$$\mathbb{Z}S_\sigma = S_\sigma - S_\sigma = \{m_1 - m_2 : m_i \in S_\sigma\}.$$

Prueba del Teorema 1.2.18

El Lema de Gordon implica que U_σ es una variedad tórica afín cuya latiz de caracteres es $\mathbb{Z}S_\sigma \subset M$. Nota que

$$\mathbb{Z}S_\sigma = S_\sigma - S_\sigma = \{m_1 - m_2 : m_i \in S_\sigma\}.$$

Supongamos $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$ para algún $k > 1$ y $m \in M$. Entonces, $km = m_1 - m_2$ para $m_1, m_2 \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$.

Prueba del Teorema 1.2.18

El Lema de Gordon implica que U_σ es una variedad tórica afín cuya latiz de caracteres es $\mathbb{Z}S_\sigma \subset M$. Nota que

$$\mathbb{Z}S_\sigma = S_\sigma - S_\sigma = \{m_1 - m_2 : m_i \in S_\sigma\}.$$

Supongamos $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$ para algún $k > 1$ y $m \in M$. Entonces, $km = m_1 - m_2$ para $m_1, m_2 \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Como $\sigma^\vee$ es convexo, tenemos

$$m + m_2 = \frac{1}{k}m_1 + \frac{k-1}{k}m_2 \in \sigma^\vee.$$

Entonces, $m = (m + m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}S_\sigma$ lo cual implica que $M/\mathbb{Z}S_\sigma$ es libre de torsión.

Continuación: Prueba del Teorema 1.2.18

Tenemos

$$T_N \text{ es el toro de } U_\sigma \Leftrightarrow \mathbb{Z}S_\sigma = M \Leftrightarrow \text{rango}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n.$$

Continuación: Prueba del Teorema 1.2.18

Tenemos

$$T_N \text{ es el toro de } U_\sigma \Leftrightarrow \mathbb{Z}S_\sigma = M \Leftrightarrow \text{rango}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n.$$

Recureda que σ es estrictamente convexo si y solo si $\dim \sigma^\vee = n$. Basta con probar

$$\dim U_\sigma = n \Leftrightarrow \text{rango}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n \Leftrightarrow \dim \sigma^\vee = n.$$

Continuación: Prueba del Teorema 1.2.18

Tenemos

$$T_N \text{ es el toro de } U_\sigma \Leftrightarrow \mathbb{Z}S_\sigma = M \Leftrightarrow \text{rango}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n.$$

Recureda que σ es estrictamente convexo si y solo si $\dim \sigma^\vee = n$. Basta con probar

$$\dim U_\sigma = n \Leftrightarrow \text{rango}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n \Leftrightarrow \dim \sigma^\vee = n.$$

La primera equivalencia vale porque la dimensión de una variedad afín tórica es la dimensión de su toro la cual es el rango de la latiz de caracteres. La segunda equivalencia es un ejercicio. ■

La siguiente clase...

- §1.3 Algunas propiedades de variedades afines
- Correspondencia entre propiedades combinatorios y geometrícas
- §2.0 Variedades proyectivas