

Curso: degeneraciones tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

agosto 18 2022

Semigrupos afines saturados y normalidad

Un semigrupo afín $S \subset M$ es **saturado** si para cada entero $k > 0$ y cada $m \in M$, $km \in S$ implica $m \in S$.

Por ejemplo, para un cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ el semigrupo afín $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ es saturado.

Semigrupos afines saturados y normalidad

Un semigrupo afín $S \subset M$ es **saturado** si para cada entero $k > 0$ y cada $m \in M$, $km \in S$ implica $m \in S$.

Por ejemplo, para un cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ el semigrupo afín $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ es saturado.

Teorema (Teorema 1.3.5)

Sea V una variedad afín tórica con toro T_N . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 V es normal (es decir, $\mathbb{C}[V]$ es enteramente cerrado).

Semigrupos afines saturados y normalidad

Un semigrupo afín $S \subset M$ es **saturado** si para cada entero $k > 0$ y cada $m \in M$, $km \in S$ implica $m \in S$.

Por ejemplo, para un cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ el semigrupo afín $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ es saturado.

Teorema (Teorema 1.3.5)

Sea V una variedad afín tórica con toro T_N . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 V es normal (es decir, $\mathbb{C}[V]$ es enteramente cerrado).
- 2 $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ donde $S \subset M$ es un semigrupo afín saturado.

Semigrupos afines saturados y normalidad

Un semigrupo afín $S \subset M$ es **saturado** si para cada entero $k > 0$ y cada $m \in M$, $km \in S$ implica $m \in S$.

Por ejemplo, para un cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ el semigrupo afín $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ es saturado.

Teorema (Teorema 1.3.5)

Sea V una variedad afín tórica con toro T_N . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 V es normal (es decir, $\mathbb{C}[V]$ es enteramente cerrado).
- 2 $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ donde $S \subset M$ es un semigrupo afín saturado.
- 3 $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}])$ donde $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral racional estrictamente convexo.

Prueba del Teorema 1.3.5

Sabemos que $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ para un semigrupo afín S . La latiz de caracteres del toro en V es $\mathbb{Z}S =: M$. Sea $n = \dim V$, entonces $M \cong \mathbb{Z}^n$.

Prueba del Teorema 1.3.5

Sabemos que $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ para un semigrupo afín S . La latiz de caracteres del toro en V es $\mathbb{Z}S =: M$. Sea $n = \dim V$, entonces $M \cong \mathbb{Z}^n$.

(1) \Rightarrow (2): V es normal, entonces su anillo de coordenadas $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$ es enteramente cerrado y su campo de fracciones es $\mathbb{C}(V)$.

Prueba del Teorema 1.3.5

Sabemos que $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ para un semigrupo afín S . La latiz de caracteres del toro en V es $\mathbb{Z}S =: M$. Sea $n = \dim V$, entonces $M \cong \mathbb{Z}^n$.

(1) \Rightarrow (2): V es normal, entonces su anillo de coordenadas $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$ es enteramente cerrado y su campo de fracciones es $\mathbb{C}(V)$.

Queremos mostrar que S es saturado, sea entonces $km \in S$ para algún $m \in M$ y $k > 0$. El carácter χ^m es una función polinomial en el toro $T_N \subset V$ y una función racional en V . Tenemos $\chi^{km} \in \mathbb{C}[S]$ que implica que χ^m es una raíz del polinomio mónico $X^k - \chi^{km}$ con coeficientes en $\mathbb{C}[S]$. Por lo tanto, $\chi^m \in \mathbb{C}[S]$ que implica $m \in S$.

Continuación de la Prueba del Teorema 1.3.5

(2) \Rightarrow (3): S es un semigrupo afín saturado. Queremos mostrar que $S = S_\sigma$ para algún cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$.

Continuación de la Prueba del Teorema 1.3.5

(2) \Rightarrow (3): S es un semigrupo afín saturado. Queremos mostrar que $S = S_\sigma$ para algún cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$.

Sea $\mathcal{A} \subset S$ un conjunto finito de generadores. Entonces $S \subset \text{Cono}(\mathcal{A}) \subset M_{\mathbb{R}}$. Tenemos

$$\text{rango}(\mathbb{Z}\mathcal{A}) = n = \dim \text{Cono}(\mathcal{A}).$$

Lo cual implica, que $\sigma := \text{Cono}(\mathcal{A})^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral racional estrictamente convexo.

Continuación de la Prueba del Teorema 1.3.5

(2) \Rightarrow (3): S es un semigrupo afín saturado. Queremos mostrar que $S = S_\sigma$ para algún cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$.

Sea $\mathcal{A} \subset S$ un conjunto finito de generadores. Entonces $S \subset \text{Cono}(\mathcal{A}) \subset M_{\mathbb{R}}$. Tenemos

$$\text{rango}(\mathbb{Z}\mathcal{A}) = n = \dim \text{Cono}(\mathcal{A}).$$

Lo cual implica, que $\sigma := \text{Cono}(\mathcal{A})^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral racional estrictamente convexo.

Además $S \subset \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$. Falta mostrar que

$$S = S_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad S \text{ saturado}$$

(Ejercicio 1.3.4).

Continuación de la Prueba del Teorema 1.3.5

(3) \Rightarrow (1): Hay que mostrar que $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es enteramente cerrado (i.e. normal) si $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral racional estrictamente convexo.

Continuación de la Prueba del Teorema 1.3.5

(3) \Rightarrow (1): Hay que mostrar que $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es enteramente cerrado (i.e. normal) si $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral racional estrictamente convexo.

Sean ρ_1, \dots, ρ_s los rayos de σ , entonces $\sigma^\vee = \bigcap_{i=1}^s \rho_i^\vee$. Tomando la intersección con M obtenemos

$$S_\sigma = \bigcap_{i=1}^s S_{\rho_i} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C}[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^s \mathbb{C}[S_{\rho_i}]$$

Entonces, $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es normal si y solo si $\mathbb{C}[S_{\rho_i}]$ es normal para cada i .

Continuación de la Prueba del Teorema 1.3.5

Sea más general $\rho \subset N_{\mathbb{R}}$ un rayo racional. Vamos a probar que $\mathbb{C}[S_{\rho}]$ es normal. Sea $u_{\rho} \in \rho \cap N$ el generador minimal. Nota que u_{ρ} es **primitivo**, es decir $\frac{1}{k}u_{\rho} \notin N$ para toda $k > 1$. Por lo tanto podemos encontrar una base e_1, \dots, e_n de N tal que $u_{\rho} = e_1$.

Continuación de la Prueba del Teorema 1.3.5

Sea más general $\rho \subset N_{\mathbb{R}}$ un rayo racional. Vamos a probar que $\mathbb{C}[S_{\rho}]$ es normal. Sea $u_{\rho} \in \rho \cap N$ el generador minimal. Nota que u_{ρ} es **primitivo**, es decir $\frac{1}{k}u_{\rho} \notin N$ para toda $k > 1$. Por lo tanto podemos encontrar una base e_1, \dots, e_n de N tal que $u_{\rho} = e_1$. Entonces, $\rho = \text{Cono}(e_1)$ y

$$\mathbb{C}[S_{\rho}] = \mathbb{C}[\rho^{\vee} \cap M] = \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$

Pero $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es normal (pues es dominio de factorización única) y por lo tanto su localización lo es

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \dots x_n} = \mathbb{C}[\rho^{\vee} \cap M] = \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$



Semigrupos afines saturados y normalidad

Sea $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ la variedad tórica afín definido por el semigrupo afín S . Sea $M = \mathbb{Z}S$ la latiz de caracteres. Escribimos $\text{Cono}(S)$ para el cono generado de cualquier conjunto finito de generadores de S y sea $\sigma := \text{Cono}(S)^\vee \subset N_{\mathbb{R}}$.

Semigrupos afines saturados y normalidad

Sea $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ la variedad tórica afín definido por el semigrupo afín S . Sea $M = \mathbb{Z}S$ la latiz de caracteres. Escribimos $\text{Cono}(S)$ para el cono generado de cualquier conjunto finito de generadores de S y sea $\sigma := \text{Cono}(S)^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$.

Proposición (Proposición 1.3.8)

Con la notación de arriba, el cono $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral racional estrictamente convexo. La inclusión $S \subset S_\sigma$ induce la inclusión de álgebras $\mathbb{C}[V] \subset \mathbb{C}[S_\sigma]$ la cual induce el morfismo

$$U_\sigma \rightarrow V$$

que es el **morfismo de normalización de V** .

Ejemplo: cono normal racional

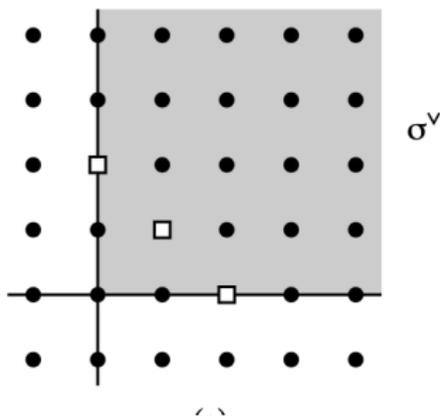
$\widehat{C}_d \subset \mathbb{C}^{d+1}$ con parametrización $\Phi_{\mathcal{A}}(s, t) \mapsto (s^d, s^{d-1}t, \dots, st^{d-1}, t^d)$.

Para $d = 2$ tenemos $\mathcal{A} = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ y según la prueba del Teorema 1.3.5 el cono asociado a \widehat{C}_2 es $\sigma^{\vee} = \text{Cono}(e_1, e_2)$

Ejemplo: cono normal racional

$\widehat{C}_d \subset \mathbb{C}^{d+1}$ con parametrización $\Phi_{\mathcal{A}}(s, t) \mapsto (s^d, s^{d-1}t, \dots, st^{d-1}, t^d)$.

Para $d = 2$ tenemos $\mathcal{A} = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ y según la prueba del Teorema 1.3.5 el cono asociado a \widehat{C}_2 es $\sigma^{\vee} = \text{Cono}(e_1, e_2)$



Pero el semigrupo $S = \mathbb{N}\mathcal{A} \subset \sigma^{\vee}$ no está saturado (pues quedan huecos como $(1, 0)$, $(0, 1)$). Aún ya vimos que \widehat{C}_d es normal.

¿Qué está pasando?

Ejemplo: cono normal racional

En la prueba del teorema definimos la latiz $M = \mathbb{Z}S$. Es decir, en el caso del cono racional normal tenemos

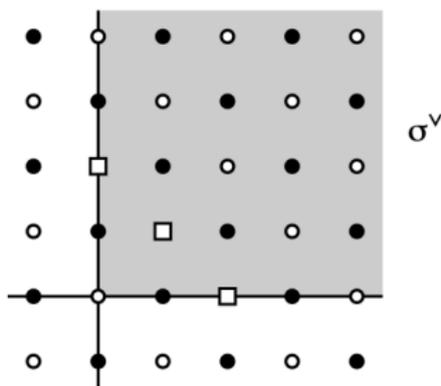
$$M = \mathbb{Z}\mathcal{A} = \langle (2, 0), (1, 1), (0, 2) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Ejemplo: cono normal racional

En la prueba del teorema definimos la latiz $M = \mathbb{Z}S$. Es decir, en el caso del cono racional normal tenemos

$$M = \mathbb{Z}\mathcal{A} = \langle (2, 0), (1, 1), (0, 2) \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Por lo tanto $\sigma^{\vee} \cap M$ son todos los puntos blancos:



y así $\mathbb{N}\mathcal{A} = \sigma^{\vee} \cap M$.

Variedades tóricas afines suaves

Recuerda que un cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es **suave** si el conjunto de sus generadores minimales se puede extender a una base de N .

Variedades tóricas afines suaves

Recuerda que un cono poliedral racional estrictamente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ es **suave** si el conjunto de sus generadores minimales se puede extender a una base de N .

Teorema (Teorema 1.3.12)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral racional estrictamente convexo. Entonces, U_{σ} es suave si y solo si σ es suave.

Además, todas las variedades afines tóricas suaves son de esta forma.

§2.0 Variedades proyectivas

El **espacio proyectivo** es $\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ donde la acción de \mathbb{C}^* en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es definida para $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ como

$$\lambda \cdot (a_0, \dots, a_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n).$$

La clase de (a_0, \dots, a_n) en \mathbb{P}^n se denota $[a_0 : \dots : a_n]$. Son **coordenadas homogéneas** que son bien definidos bajo homotecia.

§2.0 Variedades proyectivas

El **espacio proyectivo** es $\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ donde la acción de \mathbb{C}^* en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es definida para $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ como

$$\lambda \cdot (a_0, \dots, a_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n).$$

La clase de (a_0, \dots, a_n) en \mathbb{P}^n se denota $[a_0 : \dots : a_n]$. Son **coordenadas homogéneas** que son bien definidos bajo homotecía.

Una **variedad proyectiva** $V \subset \mathbb{P}^n$ es el conjunto de ceros de un número finito de polinomial homogéneos en $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. El **anillo de coordenadas homogéneas de V** es

$$\mathbb{C}[V] = S/\mathbf{I}(V)$$

donde $\mathbf{I}(V)$ es el ideal generado por todos los polinomios homogéneos que se anulan en V .

Graduación y el cono afín

El anillo S tiene la **graduación estándar** definida por $\deg(x_i) = 1$. Por lo tanto $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, donde S_d es el espacio vectorial generado por todos los polinomios homogéneos de grado d . De manera similar, ideales homogéneos se descomponen con respecto a la graduación. Por lo tanto, el anillo de coordenadas homogéneas también es graduado:

$$\mathbb{C}[V]_d := S_d / \mathbf{I}(V)_d.$$

Graduación y el cono afín

El anillo S tiene la **graduación estándar** definida por $\deg(x_i) = 1$. Por lo tanto $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, donde S_d es el espacio vectorial generado por todos los polinomios homogéneos de grado d . De manera similar, ideales homogéneos se descomponen con respecto a la graduación. Por lo tanto, el anillo de coordenadas homogéneas también es graduado:

$$\mathbb{C}[V]_d := S_d / \mathbf{I}(V)_d.$$

El ideal $\mathbf{I}(V) \subset S$ define a una variedad afín $\widehat{V} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, se llama el **cono afín de V** . Tenemos

$$V = (\widehat{V} - \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

y el anillo de coordenadas de \widehat{V} coincide con el anillo de coordenadas homogéneas de V , es decir $\mathbb{C}[\widehat{V}] = \mathbb{C}[V]$.

Ejemplo: la curva racional normal

Vimos en el Ejemplo 1.1.6 el ideal determinante

$$I = (x_i x_{j+1} - x_j x_{i+1} : 0 \leq i < j \leq d - 1) \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]$$

generado por los (2×2) -menores de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_2 & \dots & x_{d-1} \\ x_1 & x_3 & \dots & x_d \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: la curva racional normal

Vimos en el Ejemplo 1.1.6 el ideal determinante

$$I = (x_i x_{j+1} - x_j x_{i+1} : 0 \leq i < j \leq d - 1) \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]$$

generado por los (2×2) -menores de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_2 & \dots & x_{d-1} \\ x_1 & x_3 & \dots & x_d \end{pmatrix}.$$

Como I es homogéneo define una variedad proyectiva $C_d \subset \mathbb{P}^d$. Se puede identificar con el imagen del morfismo

$$\Phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^d, \quad [s : t] \mapsto [s^d : s^{d-1} : \dots : st^{d-1} : t^d].$$

Así vemos que C_d es una curva, se llama la **curva racional normal de grado d** . El cono afín de C_d es la variedad tórica afín $\widehat{C}_d \subset \mathbb{C}^{d+1}$ del Ejemplo 1.1.6.

Funciones racionales en \mathbb{P}^n

Nota que un polinomio homogéneo $f \in S_d$ con $d > 0$ *no* define una función en \mathbb{P}^n pues

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

lo cual no está bien definido en \mathbb{P}^n .

Funciones racionales en \mathbb{P}^n

Nota que un polinomio homogéneo $f \in S_d$ con $d > 0$ *no* define una función en \mathbb{P}^n pues

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

lo cual no está bien definido en \mathbb{P}^n . Pero el cociente de dos polinomios homogéneos del mismo grado si define una función. Para $f, g \in S_d$ con $g \neq 0$

$$f/g : \mathbb{P}^n - V(g) \rightarrow \mathbb{C},$$

lo cual escribimos $f/g : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{C}$ y decimos que f/g es una **función racional** en \mathbb{P}^n .

Funciones racionales en $V \subset \mathbb{P}^n$

De manera similar podemos definir funciones racionales en una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$. Sean $f, g \in \mathbb{C}[V]$ del mismo grado con $g \neq 0$. Como $\mathbb{C}[\widehat{V}] = \mathbb{C}[V]$ tenemos que f y g son funciones en \widehat{V} y por lo tanto $f/g \in \mathbb{C}(\widehat{V})$. Entonces, como $(\widehat{V} - \{0\})/\mathbb{C}^* = V$ induce una función racional $f/g : V \dashrightarrow \mathbb{C}$.

Funciones racionales en $V \subset \mathbb{P}^n$

De manera similar podemos definir funciones racionales en una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$. Sean $f, g \in \mathbb{C}[V]$ del mismo grado con $g \neq 0$. Como $\mathbb{C}[\widehat{V}] = \mathbb{C}[V]$ tenemos que f y g son funciones en \widehat{V} y por lo tanto $f/g \in \mathbb{C}(\widehat{V})$. Entonces, como $(\widehat{V} - \{0\})/\mathbb{C}^* = V$ induce una función racional $f/g : V \dashrightarrow \mathbb{C}$.

Definimos el **campo de funciones racionales en V**

$$\mathbb{C}(V) = \left\{ f/g \in \mathbb{C}(\widehat{V}) : \begin{array}{l} f, g \in \mathbb{C}[V] \text{ son homogéneos} \\ \text{del mismo grado y } g \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Muchas veces se escribe $\mathbb{C}(\widehat{V})_0$ para el conjunto del lado derecho.

Piezas afines de variedades proyectivas

Una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$ es la unión de conjuntos abiertos de Zariski que son afines. Para ver como sea $U_i = \mathbb{P}^n - V(x_i)$. Tenemos un isomorfismo $U_i \cong \mathbb{C}^n$ dado por

$$[a_0 : \cdots : a_n] \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Piezas afines de variedades proyectivas

Una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$ es la unión de conjuntos abiertos de Zariski que son afines. Para ver como sea $U_i = \mathbb{P}^n - V(x_i)$. Tenemos un isomorfismo $U_i \cong \mathbb{C}^n$ dado por

$$[a_0 : \cdots : a_n] \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Por lo tanto $U_i = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i])$.

La intersección $V \cap U_i$ es abierto en V y define una variedad afín en \mathbb{C}^n que es el conjunto de ceros de

$$f \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) = 0$$

para cada $f \in \mathbf{I}(V)$ homogéneo. Llama $V \cap U_i$ una **pieza afín de V** . Las piezas afines cubren V pues las piezas afines U_i cubren \mathbb{P}^n .

Anillos de coordenadas de piezas afines

Usamos la localización: el anillo de coordenadas de U_i es

$$\mathbb{C} \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] = (\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i})_0$$

Anillos de coordenadas de piezas afines

Usamos la localización: el anillo de coordenadas de U_i es

$$\mathbb{C} \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] = (\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i})_0$$

Queremos construir de manera similar el anillo de coordenadas de $U_i \cap V$. $x_i \in S$ induce $\bar{x}_i \in \mathbb{C}[V]$ entonces tenemos el anillo graduado

$$\mathbb{C}[V]_{\bar{x}_i} = \left\{ f/\bar{x}_i^k : f \in \mathbb{C}[V], k \geq 0 \right\}$$

donde $\deg(f/\bar{x}_i^k) := \deg(f) - k$ si f es homogéneo. Este anillo toma el lugar de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i}$. Su componente de grado cero es

$$(\mathbb{C}[V]_{\bar{x}_i})_0 = \left\{ f/\bar{x}_i^k : k \geq 0, f \in \mathbb{C}[V]_k \right\}$$

Anillos de coordenadas de piezas afines

Lema (Lema 2.0.3)

La pieza afín $V \cap U_i$ de V tiene anillo de coordenadas

$$\mathbb{C}[V \cap U_i] = (\mathbb{C}[V]_{\bar{x}_i})_0$$

Anillos de coordenadas de piezas afines

Lema (Lema 2.0.3)

La pieza afín $V \cap U_i$ de V tiene anillo de coordenadas

$$\mathbb{C}[V \cap U_i] = (\mathbb{C}[V]_{\bar{x}_i})_0$$

Prueba: Tenemos una secuencia exacta corta

$$0 \rightarrow \mathbf{I}(V) \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[V] \rightarrow 0.$$

Localizando en x_i (lo cual preserve secuencias exactas) obtenemos

$$0 \rightarrow \mathbf{I}(V)_{x_i} \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i} \rightarrow \mathbb{C}[V]_{\bar{x}_i} \rightarrow 0.$$

Como las aplicaciones en la secuencia preserven grados podemos tomar las componentes de grado cero:

$$0 \rightarrow (\mathbf{I}(V)_{x_i})_0 \rightarrow (\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i})_0 \rightarrow (\mathbb{C}[V]_{\bar{x}_i})_0 \rightarrow 0.$$

Continuación de la Prueba de Lema 2.0.3

Queremos mostrar que $(\mathbf{I}(V)_{x_i})_0$ es el ideal de $V \cap U_i$ pues ya sabemos que $(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i})_0 = \mathbb{C}[U_i]$. Para $f \in \mathbf{I}(V)$ homogéneo de grado k tenemos

$$\frac{f}{x_i^k} = f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in (\mathbf{I}(V)_{x_i})_0$$

lo cual (como ya vimos) es un elemento en $\mathbf{I}(U_i \cap V)$. Entonces, $(\mathbf{I}(V)_{x_i})_0 \subset \mathbf{I}(U_i \cap V)$.

Continuación de la Prueba de Lema 2.0.3

Queremos mostrar que $(\mathbf{I}(V)_{x_i})_0$ es el ideal de $V \cap U_i$ pues ya sabemos que $(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i})_0 = \mathbb{C}[U_i]$. Para $f \in \mathbf{I}(V)$ homogéneo de grado k tenemos

$$\frac{f}{x_i^k} = f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in (\mathbf{I}(V)_{x_i})_0$$

lo cual (como ya vimos) es un elemento en $\mathbf{I}(U_i \cap V)$. Entonces, $(\mathbf{I}(V)_{x_i})_0 \subset \mathbf{I}(U_i \cap V)$.

Para ver que son iguales toma $g\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbf{I}(V \cap U_i)$.

Existe un $k \gg 0$ tal que $x_i^k g = f(x_0, \dots, x_n)$ homogéneo de grado k .

Nota que $x_i f = 0$ en V pues $g = 0$ en $V \cap U_i$ y $x_i = 0$ en el complemento. Entonces, $x_i f \in \mathbf{I}(V)$ y $\frac{x_i f}{x_i^{k+1}} \in (\mathbf{I}(V)_{x_i})_0$ tiene imagen g . ■

Ejercicio: Para $i \neq j$ verifica que $\mathbb{C}[V \cap U_i \cap U_j] = (\mathbb{C}[V]_{\bar{x}_i \bar{x}_j})_0$.

El espectro proyectivo

La construcción análoga al functor Spec en el caso afín es el **espectro proyectivo** Proj (que *no* es un functor!).

El espectro proyectivo

La construcción análoga al functor Spec en el caso afín es el **espectro proyectivo** Proj (que *no* es un functor!).

Dado un anillo graduado $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, su **ideal irrelevante** es $S_+ := \bigoplus_{d > 0} S_d$. Como conjunto tenemos

$$\text{Proj}(S) = \{p \subset S \text{ ideal primo homogéneo}, S_+ \not\subset p\}.$$

El espectro proyectivo

La construcción análoga al functor Spec en el caso afín es el **espectro proyectivo** Proj (que *no* es un functor!).

Dado un anillo graduado $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, su **ideal irrelevante** es $S_+ := \bigoplus_{d > 0} S_d$. Como conjunto tenemos

$$\text{Proj}(S) = \{p \subset S \text{ ideal primo homogéneo}, S_+ \not\subset p\}.$$

Podemos construir el esquema $\text{Proj}(S)$ a partir de piezas afines: sea $f \in S_d, d > 0$ un elemento homogéneo no nilpotente. Definimos la pieza afín

$$D_+(f) := \text{Spec}(S_{(f)}), \quad \text{donde } S_{(f)} := \left\{ \frac{g}{f^\ell} : g \in S_{\ell d}, \ell \in \mathbb{N} \right\}.$$

El espectro proyectivo

Nota que $D_+(f) \subset \text{Proj}(S)$. Si $f_1, \dots, f_s \in S$ son tales que

$$\sqrt{(f_1, \dots, f_s)} = S_+$$

entonces las piezas afines $D_+(f_1), \dots, D_+(f_s)$ cubren $\text{Proj}(S)$ lo cual se puede obtener pegando de ellas (así como se obtiene \mathbb{P}^n pegando las piezas afines $U_i = \mathbb{C}^n$).

El espectro proyectivo

Nota que $D_+(f) \subset \text{Proj}(S)$. Si $f_1, \dots, f_s \in S$ son tales que

$$\sqrt{(f_1, \dots, f_s)} = S_+$$

entonces las piezas afines $D_+(f_1), \dots, D_+(f_s)$ cubren $\text{Proj}(S)$ lo cual se puede obtener pegando de ellas (así como se obtiene \mathbb{P}^n pegando las piezas afines $U_i = \mathbb{C}^n$).

La inclusión $S_0 \subset S_{(f)}$ para todos los $f \in S$ homogéneo de grado positivo induce un morfismo

$$\text{Proj}(S) \rightarrow \text{Spec}(S_0).$$

Productos de espacios proyectivos

El anillo asociado al producto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es

$$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$$

con bigraduación $\deg(x_i) = (1, 0)$ y $\deg(y_j) = (0, 1)$. Un polinomio f da una ecuación bien definida en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ si es **bihomogéneo**, es decir todos sus monomios tienen el mismo bigrado $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Por lo tanto variedades en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ se definen como conjuntos de ceros de ideales bihomogéneos en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$.

Productos de espacios proyectivos

El anillo asociado al producto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es

$$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$$

con bigraduación $\deg(x_i) = (1, 0)$ y $\deg(y_j) = (0, 1)$. Un polinomio f da una ecuación bien definida en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ si es **bihomogéneo**, es decir todos sus monomios tienen el mismo bigrado $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Por lo tanto variedades en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ se definen como conjuntos de ceros de ideales bihomogéneos en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$.

Proposición (Proposición 2.0.4)

Sean $V \subset \mathbb{P}^n$ y $W \subset \mathbb{P}^m$ variedades proyectivos. Entonces, $V \times W \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es una subvariedad.

Espacios proyectivos con pesos

El anillo graduado asociado a \mathbb{P}^n es $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ donde $\deg(x_i) = 1$, así $\mathbb{P}^n = \text{Proj}(S)$.

Podemos cambiar la graduación en S lo que a veces ocurre en ejemplos de manera natural.

Espacios proyectivos con pesos

El anillo graduado asociado a \mathbb{P}^n es $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ donde $\deg(x_i) = 1$, así $\mathbb{P}^n = \text{Proj}(S)$.

Podemos cambiar la graduación en S lo que a veces ocurre en ejemplos de manera natural. Sea entonces $\deg(x_i) = q_i > 0$ tal que $\text{mcd}(q_0, \dots, q_n) = 1$. Escribimos $S^{(q_0, \dots, q_n)}$. Definimos el **espacio proyectivo con pesos**

$$\mathbb{P}(q_0, \dots, q_n) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

donde $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i = \lambda^{q_i} b_i$ para $i = 0, \dots, n$ y algún $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Nota que $\mathbb{P}(1, \dots, 1) = \mathbb{P}^n$ y tenemos $\text{Proj}(S^{(q_0, \dots, q_n)}) = \mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$.

Espacios proyectivos con pesos

Un elemento en $S^{(q_0, \dots, q_n)}$ es **homogéneo con respecto a los pesos de grado d** si cada monomio x^α en f satisface $\alpha \cdot (q_0, \dots, q_n) = d$.

Así la ecuación $f = 0$ está bien definida en $\mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$ si f es homogéneo con respecto a los pesos. Entonces, variedades en $\mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$ se pueden definir de manera análoga a variedades en \mathbb{P}^n usando **ideales homogéneos con respecto a los pesos en $S^{(q_0, \dots, q_n)}$** .

Espacios proyectivos con pesos

Un elemento en $S^{(q_0, \dots, q_n)}$ es **homogéneo con respecto a los pesos de grado d** si cada monomio x^α en f satisface $\alpha \cdot (q_0, \dots, q_n)$.

Así la ecuación $f = 0$ está bien definida en $\mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$ si f es homogéneo con respecto a los pesos. Entonces, variedades en $\mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$ se pueden definir de manera análoga a variedades en \mathbb{P}^n usando **ideales homogéneos con respecto a los pesos en $S^{(q_0, \dots, q_n)}$** .

Ejemplo: Podemos encajar $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ en \mathbb{P}^3 de la siguiente manera:

$$[a : b : c] \mapsto [a^2 : ab : b^2 : c].$$

Se verifica que es bien definida y inyectiva. Además induce un isomorfismo

$$\mathbb{P}(1, 1, 2) \cong V(xz - y^2) \subset \mathbb{P}_{x,y,z,w}^3.$$

§2.1 El espacio proyectivo es tórico

Observa que \mathbb{P}^n contiene un toro

$$\begin{aligned}T_{\mathbb{P}^n} &= \mathbb{P}^n - V(x_0 \cdots x_n) = \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n : a_0 \cdots a_n \neq 0\} \\ &= \{[1 : t_1 : \cdots : t_n] \in \mathbb{P}^n : t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^n\end{aligned}$$

Además la acción del toro en si mismo extiende a \mathbb{P}^n . Calculamos la latiz de caracteres de $T_{\mathbb{P}^n}$.

§2.1 El espacio proyectivo es tórico

Observa que \mathbb{P}^n contiene un toro

$$\begin{aligned}T_{\mathbb{P}^n} &= \mathbb{P}^n - V(x_0 \cdots x_n) = \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n : a_0 \cdots a_n \neq 0\} \\ &= \{[1 : t_1 : \cdots : t_n] \in \mathbb{P}^n : t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^n\end{aligned}$$

Además la acción del toro en si mismo extiende a \mathbb{P}^n . Calculamos la latiz de caracteres de $T_{\mathbb{P}^n}$. Tenemos una secuencia exacta corta de toros

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1} \rightarrow T_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 1$$

que se obtiene de $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$.

§2.1 El espacio proyectivo es tórico

Observa que \mathbb{P}^n contiene un toro

$$\begin{aligned}T_{\mathbb{P}^n} &= \mathbb{P}^n - V(x_0 \cdots x_n) = \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n : a_0 \cdots a_n \neq 0\} \\ &= \{[1 : t_1 : \cdots : t_n] \in \mathbb{P}^n : t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}^*\} \cong (\mathbb{C}^*)^n\end{aligned}$$

Además la acción del toro en si mismo extiende a \mathbb{P}^n . Calculamos la latiz de caracteres de $T_{\mathbb{P}^n}$. Tenemos una secuencia exacta corta de toros

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1} \rightarrow T_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 1$$

que se obtiene de $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. Pasando a las latices de caracteres en la secuencia vemos que

$$\mathcal{M}_n = \left\{ (a_0, \dots, a_n) \in M = \mathbb{Z}^{n+1} : \sum_{i=0}^n a_i = 0 \right\}$$

es la latiz de caracteres de $T_{\mathbb{P}^n}$. Entonces, la latiz dual de cocaracteres es el cociente

$$\mathcal{N}_n = (\mathcal{M}_n)^* = N/(\mathcal{M}_n^\perp) = \mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}(1, \dots, 1).$$

Variedades proyectivas tóricas y puntos en una latiz

Recuerda como obtenemos una variedad afín tórica desde un conjunto finito $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$. Entonces, $Y_{\mathcal{A}}$ es la cerradura de Zariski de la imagen de

$$\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^s, \quad t \mapsto (\chi^{m_1}(1), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Para obtener una variedad proyectiva consideramos $\Phi : \mathcal{A} : T_N \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s$ para componer con la proyección a $T_{\mathbb{P}^{s-1}}$:

$$T_N \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{A}}} (\mathbb{C}^*)^s \xrightarrow{\pi} T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subset \mathbb{P}^{s-1}.$$

Definimos la **variedad tórica proyectiva** $X_{\mathcal{A}}$ como la cerradura de Zariski en \mathbb{P}^{s-1} del morfismo $\pi \circ \Phi_{\mathcal{A}}$. Es decir, $X_{\mathcal{A}}$ es la cerradura de

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, \quad t \mapsto [\chi^{m_1}(t) : \dots : \chi^{m_s}(t)].$$

La variedad proyectiva tórica $X_{\mathcal{A}}$

Si $M = \mathbb{Z}^n$ entonces $\chi^{m_i}(t)$ es el monomio de Laurent t^{m_i} y $X_{\mathcal{A}}$ es la cerradura de la imagen de

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, \quad t \mapsto [t^{m_1} : \dots : t^{m_s}].$$

La variedad proyectiva tórica $X_{\mathcal{A}}$

Si $M = \mathbb{Z}^n$ entonces $\chi^{m_i}(t)$ es el monomio de Laurent t^{m_i} y $X_{\mathcal{A}}$ es la cerradura de la imagen de

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, \quad t \mapsto [t^{m_1} : \dots : t^{m_s}].$$

Proposición (Proposición 2.1.2)

La variedad $X_{\mathcal{A}}$ es una variedad proyectiva tórica cuya dimensión coincide con la dimensión del espacio afín más pequeño en $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ que contiene \mathcal{A} .

La proposición es una consecuencia de la relación entre $X_{\mathcal{A}}$ y $Y_{\mathcal{A}}$ y de la Proposición 2.1.6 más adelante.

El cono afín de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\widehat{X}_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ el cono afín de la variedad tórica proyectiva $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$.

Recuerda que para $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ tenemos una secuencia exacta

$$0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow M$$

y el ideal de $Y_{\mathcal{A}}$ es el ideal latiz de L :

$$I_L = (x^\alpha - x^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s].$$

El cono afín de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\widehat{X}_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ el cono afín de la variedad tórica proyectiva $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$.

Recuerda que para $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ tenemos una secuencia exacta

$$0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow M$$

y el ideal de $Y_{\mathcal{A}}$ es el ideal latiz de L :

$$I_L = (x^\alpha - x^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s].$$

Proposición (Proposición 2.1.4)

Sean $Y_{\mathcal{A}}, X_{\mathcal{A}}, \widehat{X}_{\mathcal{A}}$ definidas como anteriormente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 $Y_{\mathcal{A}}$ es el cono afín $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$ de $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$.
- 2 $I_L = \mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$.
- 3 I_L es homogéneo.
- 4 Existe $u \in N$ y un entero $k > 0$ tal que $\langle m_i, u \rangle = k$ para $i = 1, \dots, s$.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(1) \Leftrightarrow (2) Tenemos $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = I(\hat{X}_{\mathcal{A}})$ por definición y vimos $I(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(1) \Leftrightarrow (2) Tenemos $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = I(\widehat{X}_{\mathcal{A}})$ por definición y vimos $I(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$.

(2) \Rightarrow (3) es directo pues $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$ es homogéneo.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(1) \Leftrightarrow (2) Tenemos $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = I(\widehat{X}_{\mathcal{A}})$ por definición y vimos $I(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$.

(2) \Rightarrow (3) es directo pues $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$ es homogéneo.

Vamos a probar **(3) \Rightarrow (4)** y **(4) \Rightarrow (1)** para completar la prueba.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(3) \Rightarrow (4) Sea I_L homogéneo $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ con $\alpha - \beta \in L$. Si x^α y x^β tienen grados distintos entonces x^α y x^β se anulan en $Y_{\mathcal{A}}$ (pues I_L es generado de elementos homogéneos). Pero ya vimos que $(1, \dots, 1) \in Y_{\mathcal{A}}$ y monomios no se anulan en este punto. Por lo tanto x^α y x^β tienen el mismo grado.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(3) \Rightarrow (4) Sea I_L homogéneo $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ con $\alpha - \beta \in L$. Si x^α y x^β tienen grados distintos entonces x^α y x^β se anulan en $Y_{\mathcal{A}}$ (pues I_L es generado de elementos homogéneos). Pero ya vimos que $(1, \dots, 1) \in Y_{\mathcal{A}}$ y monomios no se anulan en este punto. Por lo tanto x^α y x^β tienen el mismo grado. Entonces,

$$\ell \cdot (1, \dots, 1) = 0 \text{ para todas } \ell \in L.$$

Tomando el producto tensorial con \mathbb{Q} de la secuencia corta de L y luego tomando duales obtenemos la secuencia exacta

$$N_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}^s \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

Entonces, como $(1, \dots, 1) \in \mathbb{Q}^s$ se manda al cero en $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ viene de algún $\tilde{u} \in N_{\mathbb{Q}}$. Es decir, $\langle m_i, \tilde{u} \rangle = 1$ para $i = 1, \dots, s$. Multiplicando por un k suficientemente grande da $u \in N$.

Continuación de la Prueba de la Proposición 2.1.4

(4) \Rightarrow **(1)** Nota que $Y_{\mathcal{A}} \subset \widehat{X}_{\mathcal{A}}$. Como $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$ es irreducible para la otra inclusión basta probar que

$$\widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subset Y_{\mathcal{A}}.$$

Sea entonces $p \in \widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Como $X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}}$ es el toro de $X_{\mathcal{A}}$ tenemos

$$p = \mu(\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

para algún $\mu \in \mathbb{C}^*$ y $t \in T_N$. El elemento $u \in N$ de **(4)** es un cocaracter de T_N , es decir una aplicación $\mathbb{C}^* \rightarrow T_N$ de forma $\tau \mapsto \lambda^u(\tau)$.

Continuación de la Prueba de la Proposición 2.1.4

(4) \Rightarrow (1) Nota que $Y_{\mathcal{A}} \subset \widehat{X}_{\mathcal{A}}$. Como $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$ es irreducible para la otra inclusión basta probar que

$$\widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subset Y_{\mathcal{A}}.$$

Sea entonces $p \in \widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Como $X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}}$ es el toro de $X_{\mathcal{A}}$ tenemos

$$p = \mu(\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

para algún $\mu \in \mathbb{C}^*$ y $t \in T_N$. El elemento $u \in N$ de **(4)** es un cocaracter de T_N , es decir una aplicación $\mathbb{C}^* \rightarrow T_N$ de forma $\tau \mapsto \lambda^u(\tau)$. Calculamos

$$\begin{aligned} q := \Phi_{\mathcal{A}}(\lambda^u(\tau)t) &= (\chi^{m_1}(\lambda^u(\tau)t), \dots, \chi^{m_s}(\lambda^u(\tau)t)) \\ &= (\tau^{\langle m_1, u \rangle} \chi^{m_1}(t), \dots, \tau^{\langle m_s, u \rangle} \chi^{m_s}(t)) \end{aligned}$$

recordando la definición de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sabemos que $\langle m_i, u \rangle = k$ para todas i . Por lo tanto

$$q = \tau^k(\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

Como $k > 0$ podemos escoger τ de tal manera que $\tau^k = \mu$ y $p = q$. ■