Curso: degeneraciones tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

agosto 23 2022

El cono afín de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\widehat{X}_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ el cono afín de la variedad tórica proyectiva $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$.
Recuerda que para $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ tenemos una secuencia exacta

$$0 \to L \to \mathbb{Z}^s \to M$$

y el ideal de $Y_{\mathcal{A}}$ es el ideal latiz de L:

$$I_L = (x^\alpha - x^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s].$$

El cono afín de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\widehat{X}_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}^s$ el cono afín de la variedad tórica proyectiva $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Recuerda que para $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$ tenemos una secuencia exacta

$$0 \to L \to \mathbb{Z}^s \to M$$

y el ideal de $Y_{\mathcal{A}}$ es el ideal latiz de L:

$$I_L = (x^\alpha - x^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s].$$

Proposición (Proposición 2.1.4)

Sean $Y_{\mathcal{A}}, X_{\mathcal{A}}, \widehat{X}_{\mathcal{A}}$ definidas como anteriormente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $Y_{\mathcal{A}}$ es el cono afín $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$ de $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$.
2. $I_L = \mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$.
3. I_L es homogéneo.
4. Existe $u \in N$ y un entero $k > 0$ tal que $\langle m_i, u \rangle = k$ para $i = 1, \ldots, s$.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(1)⇔(2) Tenemos $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = I(\widehat{X}_{\mathcal{A}})$ por definición y vimos $I(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(1)$\Leftrightarrow$**(2)** Tenemos $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = I(\widehat{X}_{\mathcal{A}})$ por definición y vimos $I(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$.

(2)$\Rightarrow$**(3)** es directo pues $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$ es homogéneo.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(1)$\Leftrightarrow$**(2)** Tenemos $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = I(\widehat{X}_{\mathcal{A}})$ por definición y vimos $I(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$.

(2)$\Rightarrow$**(3)** es directo pues $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$ es homogéneo.

Vamos a probar **(3)**$\Rightarrow$**(4)** y **(4)**$\Rightarrow$**(1)** para completar la prueba.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(3)$\Rightarrow$**(4)** Sea I_L homogéneo $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ con $\alpha - \beta \in L$. Si x^α y x^β tienen grados distintos entonces x^α y x^β se anulan en $Y_{\mathcal{A}}$ (pues I_L es generado de elementos homogéneos). Pero ya vimos que $(1, \ldots, 1) \in Y_{\mathcal{A}}$ y monomios no se anulan en este punto. Por lo tanto x^α y x^β tienen el mismo grado.

Prueba de la Proposición 2.1.4

(3)$\Rightarrow$**(4)** Sea I_L homogéneo $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ con $\alpha - \beta \in L$. Si x^α y x^β tienen grados distintos entonces x^α y x^β se anulan en $Y_{\mathcal{A}}$ (pues I_L es generado de elementos homogéneos). Pero ya vimos que $(1, \ldots, 1) \in Y_{\mathcal{A}}$ y monomios no se anulan en este punto. Por lo tanto x^α y x^β tienen el mismo grado.Entonces,

$$\ell \cdot (1, \ldots, 1) = 0 \text{ para todas } \ell \in L.$$

Tomando el producto tensorial con $\mathbb{Q}$ de la secuencia corta de L y luego tomando duales obtenemos la secuencia exacta

$$N_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^s \to \underset{\mathbb{Q}}{\mathrm{Hom}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \to 0$$

Entonces, como $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{Q}^s$ se mando al cero en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ viene de algún $\tilde{u} \in N_{\mathbb{Q}}$. Es decir, $\langle m_i, \tilde{u} \rangle = 1$ para $i = 1, \ldots, s$. Multiplicando por un k suficientemente grande da $u \in N$.

Continuación de la Prueba de la Proposición 2.1.4

(4)$\Rightarrow$(1) Nota que $Y_{\mathcal{A}} \subset \widehat{X}_{\mathcal{A}}$. Como $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$ es irreducible para la otra inclusión basta probar que

$$\widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subset Y_{\mathcal{A}}.$$

Sea entonces $p \in \widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Como $X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}}$ es el toro de $X_{\mathcal{A}}$ tenemos

$$p = \mu(\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$$

para algún $\mu \in \mathbb{C}^*$ y $t \in T_N$. El elemento $u \in N$ de **(4)** es un cocaracter de T_N, es decir una aplicación $\mathbb{C}^* \to T_N$ de forma $\tau \mapsto \lambda^u(\tau)$.

Continuación de la Prueba de la Proposición 2.1.4

(4)⇒(1) Nota que $Y_{\mathcal{A}} \subset \widehat{X}_{\mathcal{A}}$. Como $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$ es irreducible para la otra inclusión basta probar que

$$\widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subset Y_{\mathcal{A}}.$$

Sea entonces $p \in \widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Como $X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}}$ es el toro de $X_{\mathcal{A}}$ tenemos

$$p = \mu(\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$$

para algún $\mu \in \mathbb{C}^*$ y $t \in T_N$. El elemento $u \in N$ de **(4)** es un cocaracter de T_N, es decir una aplicación $\mathbb{C}^* \to T_N$ de forma $\tau \mapsto \lambda^u(\tau)$. Calculamos

$$\begin{aligned} q := \Phi_{\mathcal{A}}(\lambda^u(\tau)t) &= (\chi^{m_1}(\lambda^u(\tau)t), \ldots, \chi^{m_s}(\lambda^u(\tau)t)) \\ &= (\tau^{\langle m_1, u\rangle}\chi^{m_1}(t), \ldots, \tau^{\langle m_s, u\rangle}\chi^{m_s}(t)) \end{aligned}$$

recordando la definición de $\langle \ , \ \rangle$. Sabemos que $\langle m_i, u\rangle = k$ para todas i. Por lo tanto

$$q = \tau^k(\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$$

Como $k > 0$ podemos escoger τ de tal manera que $\tau^k = \mu$ y $p = q$. ■

El toro de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$. Definimos

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i m_i : a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{s} a_i = 0 \right\} \subset \mathcal{M}_{s-1}$$

Ejercicio 2.1.3 El rango de $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es la dimensión del espacio afín más pequeño en $M_{\mathbb{R}}$ que contiene $\mathcal{A}$.

El toro de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$. Definimos

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i m_i : a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{s} a_i = 0 \right\} \subset \mathcal{M}_{s-1}$$

Ejercicio 2.1.3 El rango de $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es la dimensión del espacio afín más pequeño en $M_{\mathbb{R}}$ que contiene $\mathcal{A}$.

Proposición (Proposición 2.1.6)

Sea $X_{\mathcal{A}}$ la variedad tórica proyectiva definida por $\mathcal{A} \subset M_{\mathbb{R}}$.

1. $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es la latiz de caracteres de $X_{\mathcal{A}}$.

El toro de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$. Definimos

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i m_i : a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{s} a_i = 0 \right\} \subset \mathcal{M}_{s-1}$$

Ejercicio 2.1.3 El rango de $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es la dimensión del espacio afín más pequeño en $M_{\mathbb{R}}$ que contiene $\mathcal{A}$.

Proposición (Proposición 2.1.6)

Sea $X_{\mathcal{A}}$ la variedad tórica proyectiva definida por $\mathcal{A} \subset M_{\mathbb{R}}$.

1. $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es la latiz de caracteres de $X_{\mathcal{A}}$.
2. La dimensión de $X_{\mathcal{A}}$ es la dimensión del subespacio afín más pequeño de $M_{\mathbb{R}}$ que contiene $\mathcal{A}$. Más precisamente,

El toro de $X_{\mathcal{A}}$

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$. Definimos

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i m_i : a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^{s} a_i = 0 \right\} \subset \mathcal{M}_{s-1}$$

Ejercicio 2.1.3 El rango de $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es la dimensión del espacio afín más pequeño en $M_{\mathbb{R}}$ que contiene $\mathcal{A}$.

Proposición (Proposición 2.1.6)

Sea $X_{\mathcal{A}}$ la variedad tórica proyectiva definida por $\mathcal{A} \subset M_{\mathbb{R}}$.

1. $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es la latiz de caracteres de $X_{\mathcal{A}}$.
2. La dimensión de $X_{\mathcal{A}}$ es la dimensión del subespacio afín más pequeño de $M_{\mathbb{R}}$ que contiene $\mathcal{A}$. Más precisamente,

$$\dim X_{\mathcal{A}} = \begin{cases} \text{rango}\mathbb{Z}\mathcal{A} - 1, & \exists u \in N, k > 0 : \langle m_i, u \rangle = k \\ \text{rango}\mathbb{Z}\mathcal{A}, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Prueba de la Proposición 2.1.6

(1) Sea M' la latiz de caracteres del toro $T_{X_\mathcal{A}} \subset X_\mathcal{A}$. Tenemos diagramas conmutativas

$$\begin{tikzcd} T_N \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & T_{\mathbb{P}^{s-1}} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^{s-1} \\ & T_{X_\mathcal{A}} \arrow[u, hook] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} M & \mathcal{M}_{s-1} \arrow[l] \arrow[d, two heads] \\ & M' \arrow[ul, hook] \end{tikzcd}$$

Recuerda que $\mathcal{M}_{s-1} = \{(a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s : \sum_{i=1}^{s} a_i = 0\}$ y $\mathcal{M}_{s-1} \to M$ es inducida por $e_i \mapsto m_i$. Por lo tanto $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es su imagen entonces, $\mathbb{Z}'\mathcal{A} = M'$.

Prueba de la Proposición 2.1.6

(1) Sea M' la latiz de caracteres del toro $T_{X_\mathcal{A}} \subset X_\mathcal{A}$. Tenemos diagramas conmutativas

$$
\begin{tikzcd}
T_N \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & T_{\mathbb{P}^{s-1}} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^{s-1} \\
& T_{X_\mathcal{A}} \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
M & \mathcal{M}_{s-1} \arrow[l] \arrow[d, two heads] \\
& M' \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd}
$$

Recuerda que $\mathcal{M}_{s-1} = \{(a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s : \sum_{i=1}^s a_i = 0\}$ y $\mathcal{M}_{s-1} \to M$ es inducida por $e_i \mapsto m_i$. Por lo tanto $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$ es su imagen entonces, $\mathbb{Z}'\mathcal{A} = M'$.

(2) La primera parte es consecuencia de **(1)** y del Ejercicio 2.1.3.

Caso 1: Si $\exists u \in N, k > 0 : \langle m_i, u \rangle = k$ entonces $Y_\mathcal{A}$ es el cono afín de $X_\mathcal{A}$ (Proposición 2.1.4). Entonces, tenemos

$$0 \to \mathbb{Z}'\mathcal{A} \to \mathbb{Z}\mathcal{A} \overset{\langle \cdot, u \rangle}{\to} k\mathbb{Z} \to 0$$

y así $\text{rango}\mathbb{Z}\mathcal{A} - 1 = \text{rango}\mathbb{Z}'\mathcal{A}$.

Caso 2: $Y_{\mathcal{A}} \neq \widehat{X}_{\mathcal{A}}$, entonces I_L no es homogéneo y existe un generador $x^\alpha - x^\beta$ tal que $(\alpha - \beta) \cdot (1, \ldots, 1) \neq 0$ con $\alpha - \beta \in L$ donde

$0 \to L \to \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}\mathcal{A} \to 0$. Considerando $0 \to \mathcal{M}_{s-1} \to \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z} \to 0$,

el imagen de $L \subset \mathbb{Z}^s$ es $\ell\mathbb{Z}$ para algún $\ell > 0$. Así obtenemos

Caso 2: $Y_{\mathcal{A}} \neq \widehat{X}_{\mathcal{A}}$, entonces I_L no es homogéneo y existe un generador $x^{\alpha} - x^{\beta}$ tal que $(\alpha - \beta) \cdot (1, \ldots, 1) \neq 0$ con $\alpha - \beta \in L$ donde

$0 \to L \to \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}\mathcal{A} \to 0.$ Considerando $0 \to \mathcal{M}_{s-1} \to \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z} \to 0,$

el imagen de $L \subset \mathbb{Z}^s$ es $\ell\mathbb{Z}$ para algún $\ell > 0$. Así obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L \cap \mathcal{M}_{s-1} & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \ell\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_{s-1} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^s & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}'\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

que implica rango$\mathbb{Z}\mathcal{A} =$ rango $\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \dim X_{\mathcal{A}}$. ■

Piezas afines de $X_{\mathcal{A}}$

Recuerda $U_i = \mathbb{P}^{s-1} - V(x_i)$ que contiene $T_{\mathbb{P}^{s-1}}$. Tenemos

$$T_{X_{\mathcal{A}}} = X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subset X_{\mathcal{A}} \cap U_i$$

Como $X_{\mathcal{A}} = \overline{T_{X_{\mathcal{A}}}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ también $X_{\mathcal{A}} \cap U_i = \overline{T_{X_{\mathcal{A}}}} \subset U_i \cong \mathbb{C}^{s-1}$ y $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ es un variedad tórica afín. Si $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$ tenemos el isomorfismo $U_i \cong \mathbb{C}^{s-1}$ definido por

$$(a_1, \ldots, a_s) \mapsto \left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{1+i}}{a_i}, \ldots, \frac{a_s}{a_i} \right)$$

Piezas afines de $X_{\mathcal{A}}$

Recuerda $U_i = \mathbb{P}^{s-1} - V(x_i)$ que contiene $T_{\mathbb{P}^{s-1}}$. Tenemos

$$T_{X_{\mathcal{A}}} = X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subset X_{\mathcal{A}} \cap U_i$$

Como $X_{\mathcal{A}} = \overline{T_{X_{\mathcal{A}}}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ también $X_{\mathcal{A}} \cap U_i = \overline{T_{X_{\mathcal{A}}}} \subset U_i \cong \mathbb{C}^{s-1}$ y $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ es un variedad tórica afín. Si $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$ tenemos el isomorfismo $U_i \cong \mathbb{C}^{s-1}$ definido por

$$(a_1, \ldots, a_s) \mapsto \left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{1+i}}{a_i}, \ldots, \frac{a_s}{a_i} \right)$$

Recuerda que $\chi^{m_j}/\chi^{m_i} = \chi^{m_j - m_i}$. Por lo tanto $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ es la variedad tórica afín definida por $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - m_i = \{m_j - m_i : j \neq i\}$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\mathcal{A}_i} : T_N & \to & \mathbb{C}^{s-1} \\ t & \mapsto & (\chi^{m_1 - m_i}(t), \ldots, \chi^{m_s - m_i}(t)) \end{array}$$

Piezas afines de $X_{\mathcal{A}}$

La diapositiva anterior implica el sigueinte resultado:

Proposición (Proposición 2.1.8)

Tenemos $X_{\mathcal{A}} \cap U_i = Y_{\mathcal{A}_i} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S}_i])$ donde $\mathrm{S_i} = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$ y la latiz de caracteres de $Y_{\mathcal{A}_i}$ es $\mathbb{Z}\mathcal{A}_i = \mathbb{Z}'\mathcal{A}$.

Piezas afines de $X_{\mathcal{A}}$

La diapositiva anterior implica el sigueinte resultado:

Proposición (Proposición 2.1.8)

Tenemos $X_{\mathcal{A}} \cap U_i = Y_{\mathcal{A}_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S}_i])$ donde $\mathrm{S_i} = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$ y la latiz de caracteres de $Y_{\mathcal{A}_i}$ es $\mathbb{Z}\mathcal{A}_i = \mathbb{Z}'\mathcal{A}$.

Ejercicio (Prop. 2.1.8): Para $i \neq j$ tenemos la inclusión de $(X_{\mathcal{A}} \cap U_i) \cap U_j \subset X_{\mathcal{A}} \cap U_i$ dada por la localización en $\chi^{m_j - m_i}$:

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i \cap U_j = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S_i}]_{\chi^{m_j - m_i}}) \subseteq \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S_i}]) = X_{\mathcal{A}} \cap U_i$$

§2.2 Politopos

Recuerda que un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es la envolvente convexa de un conjunto finito $S \subset M_{\mathbb{R}}$.

Definimos la **dimensión** de P como la dimensión del subespacio afín más pequeño de $M_{\mathbb{R}}$ que contiene a P.

§2.2 Politopos

Recuerda que un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es la envolvente convexa de un conjunto finito $S \subset M_{\mathbb{R}}$.

Definimos la **dimensión** de P como la dimensión del subespacio afín más pequeño de $M_{\mathbb{R}}$ que contiene a P.

Dado $u \in N_{\mathbb{R}}$ y $b \in \mathbb{R}$ definimos el **hiperplano afín** resp. el **semiespacio afín cerrado**

$$H_{u,b} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle = b\} \quad \text{resp.} \quad H^+_{u,b} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq b\}$$

§2.2 Politopos

Recuerda que un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es la envolvente convexa de un conjunto finito $S \subset M_{\mathbb{R}}$.

Definimos la **dimensión** de P como la dimensión del subespacio afín más pequeño de $M_{\mathbb{R}}$ que contiene a P.

Dado $u \in N_{\mathbb{R}}$ y $b \in \mathbb{R}$ definimos el **hiperplano afín** resp. el **semiespacio afín cerrado**

$$H_{u,b} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle = b\} \quad \text{resp.} \quad H_{u,b}^{+} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq b\}$$

Un conjunto $Q \subseteq P$ es un **cara de** P (escriot $Q \preceq P$) si existen $u \in N_{\mathbb{R}}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$P \cap H_{u,b} = Q \quad \text{y} \quad P \subset H_{u,b}^{+}.$$

En este caso $H_{u,b}$ es un **hiperplano de soporte de** P.

Caras de politopos

Caras de dimensión cero se llaman **vértices** y caras de codimensión uno de llaman **facetas**.

Proposición (Proposición 2.2.1)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo.

1. P es la envolvente convexa de sus vértices.

Caras de politopos

Caras de dimensión cero se llaman **vértices** y caras de codimensión uno de llaman **facetas**.

Proposición (Proposición 2.2.1)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo.

1. P es la envolvente convexa de sus vértices.
2. Si $P = \mathrm{Conv}(S)$ entonces cada vértice de P pertenece a S.

Caras de politopos

Caras de dimensión cero se llaman **vértices** y caras de codimensión uno de llaman **facetas**.

Proposición (Proposición 2.2.1)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo.

1. P es la envolvente convexa de sus vértices.
2. Si $P = \mathrm{Conv}(S)$ entonces cada vértice de P pertenece a S.
3. Si Q es una cara de P entonces las caras de Q con justamente las caras de P que están contenidos en Q.

Caras de politopos

Caras de dimensión cero se llaman **vértices** y caras de codimensión uno de llaman **facetas**.

Proposición (Proposición 2.2.1)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo.

1. P es la envolvente convexa de sus vértices.
2. Si $P = \mathrm{Conv}(S)$ entonces cada vértice de P pertenece a S.
3. Si Q es una cara de P entonces las caras de Q con justamente las caras de P que están contenidos en Q.
4. Cada cara propia $Q \prec P$ es la intersección de las facetas de P que contienen a Q.

Facetas de politopos dimensión completa

Cada politopo P se puede presentar como una intersección finita de semiespacios afines cerrados. La reversa: cada intersección de un número finito de semiespacios afines cerrados que es **acotada** es un politopo.

Facetas de politopos dimensión completa

Cada politopo P se puede presentar como una intersección finita de semiespacios afines cerrados. La reversa: cada intersección de un número finito de semiespacios afines cerrados que es **acotada** es un politopo.

Si $\dim P = \dim M_{\mathbb{R}}$, es decir P es de dimensión **completa**, entonces cada faceta tiene un hiperplano afín de suporte único. Para $F \prec P$ una faceta escribimos:

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle = -a_F\} \quad \text{y} \quad H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\}$$

donde $(u_F, a_F) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ es única bajo multiplicación con $\mathbb{R}_{>0}$. El vector u_F se llama un **vector normal de la faceta F con orientación al interior**. Tenemos

$$P = \bigcap_{F \prec P \text{ faceta}} H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \ \forall\ F \prec P \text{ faceta}\}$$

El politopo $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M_{\mathbb{R}}$ y $X_{\mathcal{A}}$ la variedad tórica proyectiva asociada. Para $P = \mathrm{Conv}(\mathcal{A}) \subset M_{\mathbb{R}}$ tenemos con la Proposición 2.1.6

$$\dim X_{\mathcal{A}} = \dim P.$$

El politopo Conv($\mathcal{A}$)

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M_{\mathbb{R}}$ y $X_{\mathcal{A}}$ la variedad tórica proyectiva asociada. Para $P = \mathrm{Conv}(\mathcal{A}) \subset M_{\mathbb{R}}$ tenemos con la Proposición 2.1.6

$$\dim X_{\mathcal{A}} = \dim P.$$

Proposición (Proposición 2.1.9)

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subset M$ y $P = \mathrm{Conv}(\mathcal{A}) \subset M_{\mathbb{R}}$. Definimos $J = \{1 \leq j \leq s : m_j \text{ es vértice de } P\}$. Entonces,

$$X_{\mathcal{A}} = \bigcup_{j \in I} X_{\mathcal{A}} \cap U_j.$$

Dado $P \subset M_{\mathbb{R}}$ queremos definir la variedad tórica proyectiva $X_{P \cap M}$. Solo tiene sentido si P tiene un número *suficiente* de puntos en M.

Prueba de la Proposición 2.1.9

P.D.: Para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ existe $j \in J$ tal que $X_{\mathcal{A}} \cap U_i \subseteq X_{\mathcal{A}} \cap U_j$.

Tenemos

$$P \cap M_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i m_i : a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^{s} a_i = 1 \right\}.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $m_i \in P \cap M$ es una $\mathbb{Q}$-combinación convexa de los vértices m_j, $j \in J$ de P. Entonces, existe $k > 0$ y $k_j \geq 0$ tal que

$$km_i = \sum_{j \in J} k_j m_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in J} k_j = k.$$

Prueba de la Proposición 2.1.9

P.D.: Para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ existe $j \in J$ tal que $X_{\mathcal{A}} \cap U_i \subseteq X_{\mathcal{A}} \cap U_j$.

Tenemos
$$P \cap M_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i m_i : a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^{s} a_i = 1 \right\}.$$

Sea $i \in \{1, \dots, s\}$ tal que $m_i \in P \cap M$ es una $\mathbb{Q}$-combinación convexa de los vértices m_j, $j \in J$ de P. Entonces, existe $k > 0$ y $k_j \geq 0$ tal que

$$km_i = \sum_{j \in J} k_j m_j \quad \text{y} \quad \sum_{j \in J} k_j = k.$$

Por lo tanto $\sum_{j \in J} k_j(m_j - m_i) = 0$. Si $k_j > 0$ vemos que $m_j - m_i$ tiene un inverso en $\mathrm{S_i}$. Entonces, también $\chi^{m_j - m_i} \in \mathbb{C}[\mathrm{S_i}]$ es invertible y $\mathbb{C}[\mathrm{S_i}]_{\chi^{m_j - m_i}} = \mathbb{C}[\mathrm{S_i}]$. Ejercicio Prop.2.1.8 implica

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i \cap U_j = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathrm{S_i}]) = X_{\mathcal{A}} \cap U_i.$$

Por lo tanto $X_{\mathcal{A}} \cap U_i \subset X_{\mathcal{A}} \cap U_j$. ■

Politopos especiales

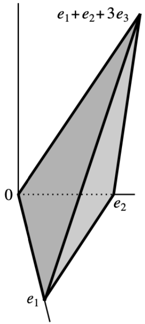
Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de dimensión d. Entonces,

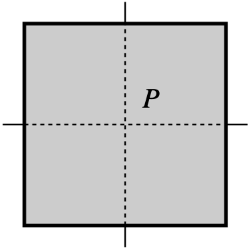
1. P es un **simplex** o si es la envolvente convexa de $d+1$ vértices.
2. P es **simplicial** si cada faceta de P es un simplex.
3. P es **simple** si cada vértice es la intersección de d facetas.

Politopos especiales

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de dimensión d. Entonces,

1. P es un **simplex** o si es la envolvente convexa de $d+1$ vértices.
2. P es **simplicial** si cada faceta de P es un simplex.
3. P es **simple** si cada vértice es la intersección de d facetas.





Equivalencia y multiples de politopos

Dos politopos P_1 y P_2 son **combinatorialmente equivalentes** si existe una biyección

$$\{\text{facetas de } P_1\} \cong \{\text{facetas de } P_2\}.$$

que preserva dimensiones, intersecciones y la relación $\preceq$ entre caras.

Equivalencia y multiples de politopos

Dos politopos P_1 y P_2 son **combinatorialmente equivalentes** si existe una biyección

$$\{\text{facetas de } P_1\} \cong \{\text{facetas de } P_2\}.$$

que preserva dimensiones, intersecciones y la relación $\preceq$ entre caras.

Si $P = \mathrm{Conv}(S)$ y $r \geq 0$ definimos su **múltiple** $rP = \mathrm{Conv}(rS)$. Sea P definido por las desigualdades $\langle m, u_i \rangle \geq -a_i$, $1 \leq i \leq s$. Entonces, rP es definido para $1 \leq i \leq s$ por

$$\langle m, u_i \rangle \geq -ra_i$$

En particular, si P es de dimensión completa, P y rP tienen los mismos vectores normales de facetas con orientación al interior. Además son combinatorialmente equivalentes.

Suma de Minkowski

Sean A_1 y A_2 conjuntos de $M_{\mathbb{R}}$. Definimos su **suma de Minkowski**:

$$A_1 + A_2 = \{m_1 + m_2 : m_1 \in A_1, m_2 \in A_2\}.$$

Para politopos $P_1 = \mathrm{Conv}(S_1)$ y $P_2 = \mathrm{Conv}(S_2)$ tenemos que su suma de Minkowski es el politopo

$$P_1 + P_2 = \mathrm{Conv}(S_1 + S_2).$$

Suma de Minkowski

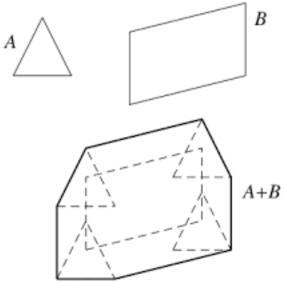
Sean A_1 y A_2 conjuntos de $M_{\mathbb{R}}$. Definimos su **suma de Minkowski**:

$$A_1 + A_2 = \{m_1 + m_2 : m_1 \in A_1, m_2 \in A_2\}.$$

Para politopos $P_1 = \mathrm{Conv}(S_1)$ y $P_2 = \mathrm{Conv}(S_2)$ tenemos que su suma de Minkowski es el politopo

$$P_1 + P_2 = \mathrm{Conv}(S_1 + S_2).$$

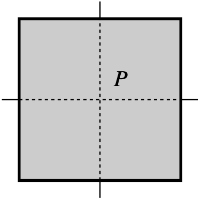
Además se cumple la ley distributiva: $rP + sP = (r + s)P$.

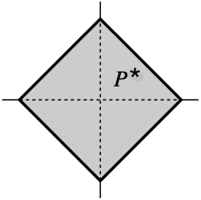


Dualidad de politopos

Si $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es una politopo de dimensión completa que contiene 0 en su interior ($0 \in P^{\circ}$) podemos definir su politopo **dual** o **polar**

$$P^* = \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq -1 \; \forall \; m \in P\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

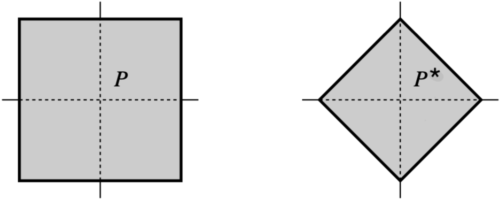




Dualidad de politopos

Si $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es una politopo de dimensión completa que contiene 0 en su interior ($0 \in P^{\circ}$) podemos definir su politopo **dual** o **polar**

$$P^* = \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u \rangle \geq -1 \; \forall \; m \in P\} \subset N_{\mathbb{R}}$$



Ejercicio 2.2.1: Si $P = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq -a_F, F \text{ faceta}\}$ entonces $a_F > 0$ para cada F pues $0 \in P^{\circ}$. En este caso tenemos

$$P^* = \mathrm{Conv}\left(\frac{1}{a_F} u_F\right) \quad \text{y} \quad (P^*)^* = P.$$

Politopos de latiz

$P = \mathrm{Conv}(S) \subset M_{\mathbb{R}}$ es un **politopo de latiz** si $S \subset M$ o equivalentemente todos sus vértices están en M. Además

$$P = \bigcap_{i=1}^{s} H^{+}_{u_i, b_i}$$

con $u_i \in N$ y $b_i \in \mathbb{Z}$.

Politopos de latiz

$P = \mathrm{Conv}(S) \subset M_{\mathbb{R}}$ es un **politopo de latiz** si $S \subset M$ o equivalentemente todos sus vértices están en M. Además

$$P = \bigcap_{i=1}^{s} H^{+}_{u_i, b_i}$$

con $u_i \in N$ y $b_i \in \mathbb{Z}$. Si P es de dimensión completa y $F \prec P$ es una faceta los vectores normales de F están en un rayo racional en $N_{\mathbb{R}}$. En este caso $u_F \in N$ sea el generador minimal del rayo. Nota que para $m \in P \cap M$ un vértice se cumple

$$\langle m, u_F \rangle = -a_F$$

por lo tanto $a_F \in \mathbb{Z}$. Los generadores minimales u_F nos dan una presentación única del politopo de latiz.

Politopos de latiz

$P = \mathrm{Conv}(S) \subset M_{\mathbb{R}}$ es un **politopo de latiz** si $S \subset M$ o equivalentemente todos sus vértices están en M. Además

$$P = \bigcap_{i=1}^{s} H^{+}_{u_i, b_i}$$

con $u_i \in N$ y $b_i \in \mathbb{Z}$. Si P es de dimensión completa y $F \prec P$ es una faceta los vectores normales de F están en un rayo racional en $N_{\mathbb{R}}$. En este caso $u_F \in N$ sea el generador minimal del rayo. Nota que para $m \in P \cap M$ un vértice se cumple

$$\langle m, u_F \rangle = -a_F$$

por lo tanto $a_F \in \mathbb{Z}$. Los generadores minimales u_F nos dan una presentación única del politopo de latiz.

Ejercicio 2.2.2: Las caras, sumas de Minkowski, y multiples con respecto a enteros de politopos de latiz son politopos de latiz.

Politopos normales

Un politopo de latiz es **normal** si para cada enteros $k, \ell > 0$

$$(kP \cap M) + (\ell P \cap M) = (k + \ell)P \cap M$$

La inclusión $\subseteq$ siempre se cumple. Entonces, P es normal si y solo si para cada $k > 0$

$$\sum_{i=1}^{k} (P \cap M) = kP \cap M$$

Politopos normales

Un politopo de latiz es **normal** si para cada enteros $k, \ell > 0$

$$(kP \cap M) + (\ell P \cap M) = (k+\ell)P \cap M$$

La inclusión $\subseteq$ siempre se cumple. Entonces, P es normal si y solo si para cada $k > 0$

$$\sum_{i=1}^{k} (P \cap M) = kP \cap M$$

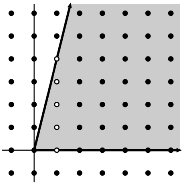
Es decir, P tiene suficientemente puntos en la latiz para generar todos los puntos en la latiz de sus múltiples.

Teorema (Teorema 2.2.12)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión $n \geq 2$. Entonces kP es normal para cada $k > n-1$.

Generadores de conos y semigrupos

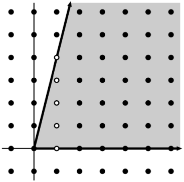
Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Un $0 \neq m \in S_\sigma$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_\sigma$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de** S_σ como $\mathcal{H} := \{m \in S_\sigma : m \text{ irreducible}\}$.

Generadores de conos y semigrupos

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Un $0 \neq m \in S_\sigma$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_\sigma$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de** S_σ como $\mathcal{H} := \{m \in S_\sigma : m \text{ irreducible}\}$.

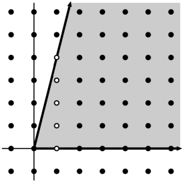
Proposición (Proposición 1.2.23)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ con base de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces,

1. $\mathcal{H}$ es finito y un conjunto de generadores para S_σ.

Generadores de conos y semigrupos

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Un $0 \neq m \in S_\sigma$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_\sigma$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de** S_σ como $\mathcal{H} := \{m \in S_\sigma : m \text{ irreducible}\}$.

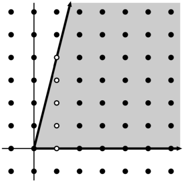
Proposición (Proposición 1.2.23)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ con base de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces,

1. $\mathcal{H}$ es finito y un conjunto de generadores para S_σ.
2. $\mathcal{H}$ contiene los generadores minimales del cono $\sigma^\vee$.

Generadores de conos y semigrupos

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Un $0 \neq m \in S_\sigma$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_\sigma$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de** S_σ como $\mathcal{H} := \{m \in S_\sigma : m \text{ irreducible}\}$.

Proposición (Proposición 1.2.23)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ con base de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces,

1. $\mathcal{H}$ es finito y un conjunto de generadores para S_σ.
2. $\mathcal{H}$ contiene los generadores minimales del cono $\sigma^\vee$.
3. $\mathcal{H}$ es el conjunto minimal de generadores de S_σ bajo inclución.

Prueba de la Proposición 1.2.23

(1) y (3) Nota que $\sigma^\vee$ es estrictamente convexo pues σ es de dimensión completa. Por lo tanto existe $u \in \sigma \cap N - \{0\}$ tal que $\langle m, u \rangle \in \mathbb{N}$ para todas $m \in S_\sigma$ y $\langle m, u \rangle = 0$ si y solo si $m = 0$.

Prueba de la Proposición 1.2.23

(1) y (3) Nota que $\sigma^\vee$ es estrictamente convexo pues σ es de dimensión completa. Por lo tanto existe $u \in \sigma \cap N - \{0\}$ tal que $\langle m, u \rangle \in \mathbb{N}$ para todas $m \in S_\sigma$ y $\langle m, u \rangle = 0$ si y solo si $m = 0$.

Supongamos $m \in S_\sigma$ no es irreducible entonces existen $m', m'' \in S_\sigma - \{0\}$ tal que $m = m' + m''$ y

$$\langle m, u \rangle = \langle m', u \rangle + \langle m'', u \rangle$$

donde $\langle m', u \rangle, \langle m'', u \rangle \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $\langle m', u \rangle, \langle m'', u \rangle < \langle m, u \rangle$. Procediendo por inducción en $\langle m, u \rangle$ vemos que $\mathcal{H}$ es un conjunto de generadores de S_σ.

Continuación de la prueba de la Proposición 1.2.23

Además $\mathcal{H}$ es finito pues podemos generar a los elementos de cualquier conjunto finito de generadores. Vemos que también es el conjunto minimal de generadores pues si no lo es obtenemos una contradicción con la irreducibilidad.

Continuación de la prueba de la Proposición 1.2.23

Además $\mathcal{H}$ es finito pues podemos generar a los elementos de cualquier conjunto finito de generadores. Vemos que también es el conjunto minimal de generadores pues si no lo es obtenemos una contradicción con la irreducibilidad.

(2) P.D.: los generadores de los rayos ρ de $\sigma^\vee$ son irreducibles en S_σ. Sea $u \in N$ tal que $\rho = H_u \cap \sigma^\vee$ y sea u_ρ el generador minimal de ρ.
Supongamos que $u_\rho = m' + m''$ con $m', m'' \in S_\sigma$.

$$\langle u_\rho, u \rangle = \langle m', u \rangle + \langle m'', u \rangle = 0.$$

Entonces, $\langle m', u \rangle = \langle m'', u \rangle = 0$ y $m', m'' \in \rho \cap M$. Por lo tanto $m' = 0$ o $m'' = 0$. ■