

Curso: degeneraciones tóricas

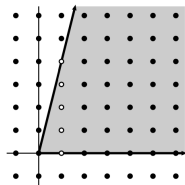
Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

agosto 24 2022

Generadores de conos y semigrupos

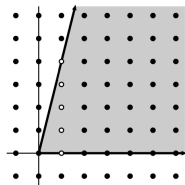
Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$. Un $0 \neq m \in S_{\sigma}$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_{\sigma}$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de S_{σ}** como $\mathcal{H} := \{m \in S_{\sigma} : m \text{ irreducible}\}$.

Generadores de conos y semigrupos

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$. Un $0 \neq m \in S_{\sigma}$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_{\sigma}$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de S_{σ}** como $\mathcal{H} := \{m \in S_{\sigma} : m \text{ irreducible}\}$.

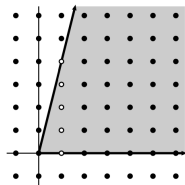
Proposición (Proposición 1.2.23)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ con base de Hilbert \mathcal{H} . Entonces,

- 1 \mathcal{H} es finito y un conjunto de generadores para S_{σ} .

Generadores de conos y semigrupos

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$. Un $0 \neq m \in S_{\sigma}$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_{\sigma}$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de S_{σ}** como $\mathcal{H} := \{m \in S_{\sigma} : m \text{ irreducible}\}$.

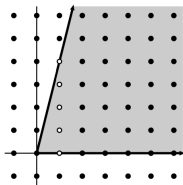
Proposición (Proposición 1.2.23)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ con base de Hilbert \mathcal{H} . Entonces,

- 1 \mathcal{H} es finito y un conjunto de generadores para S_{σ} .
- 2 \mathcal{H} contiene los generadores minimales del cono σ^{\vee} .

Generadores de conos y semigrupos

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$. Un $0 \neq m \in S_{\sigma}$ es **irreducible** si $m = m' + m''$ con $m', m'' \in S_{\sigma}$ implica $m' = 0$ o $m'' = 0$.



Definimos la **base de Hilbert de S_{σ}** como $\mathcal{H} := \{m \in S_{\sigma} : m \text{ irreducible}\}$.

Proposición (Proposición 1.2.23)

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono racional poliedral estrictamente convexo de dimensión completa y $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ con base de Hilbert \mathcal{H} . Entonces,

- 1 \mathcal{H} es finito y un conjunto de generadores para S_{σ} .
- 2 \mathcal{H} contiene los generadores minimales del cono σ^{\vee} .
- 3 \mathcal{H} es el conjunto minimal de generadores de S_{σ} bajo inclusión.

Politopos normales y conos

Recuerda el cono de un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$

$$C(P) = \text{Cono}(\{1\} \times P) \subset \mathbb{R} \times M_{\mathbb{R}}$$

Nota que $m \in kP \cap M$ corresponde a $(k, m) \in C(P) \cap \mathbb{Z} \times M$.

Politopos normales y conos

Recuerda el cono de un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$

$$C(P) = \text{Cono}(\{1\} \times P) \subset \mathbb{R} \times M_{\mathbb{R}}$$

Nota que $m \in kP \cap M$ corresponde a $(k, m) \in C(P) \cap \mathbb{Z} \times M$.

Lema (Lema 2.2.14)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz. Entonces, P es normal si y solo si $\{1\} \times (P \cap M)$ es un conjunto de generadores para el semigrupo $C(P) \cap (\mathbb{Z} \times M)$.

En particular, P es normal si y solo si $\{1\} \times (P \cap M)$ es la base de Hilbert de $C(P) \cap \mathbb{Z} \times M$.

Un politopo normal tiene un número suficiente de puntos en la latiz en el sentido que son suficientes para el semigrupo $S_{C(P)^{\vee}}$.

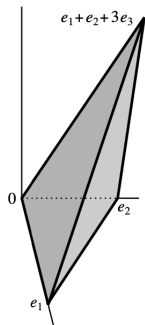
Ejemplo: politopos normales y conos

Sea $P = \text{Conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3) \subset \mathbb{R}^3$. Nota

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in 2P \cap M$$

De manera similar obtenemos $(1, 1, 2)^T \in M \cap 2P$.

Se puede verificar que $C(P) \subset \mathbb{R}^4$ tiene generadores minimales $(1, 0), (1, e_1), (1, e_2), (1, e_1 + e_2 + 3e_3)$ y $(2, e_1 + e_2 + e_3), (2, e_1 + e_2 + 2e_3)$. En particular, Lema 2.2.14 implica que P no es normal.



El cono de un politopo y el cono afín

Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ y $P = \text{Conv}(\mathcal{A}) \subset M_{\mathbb{R}}$. Consideramos $\{1\} \times \mathcal{A} \subset \mathbb{Z} \times M$, que está contenido en $C(P) \cap \{1\} \times M$.

Nota que $\mathbb{Z} \times M$ es la latiz de caracteres del toro $\mathbb{C}^* \times T_N$. Tenemos

$$\Phi_{\mathcal{A} \times \{1\}}(\mu, t) = (\chi^{m_1}(t)\mu, \dots, \chi^{m_s}(t)\mu) = \mu \cdot (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Por lo tanto, $X_{\{1\} \times \mathcal{A}} = X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Además $\{1\} \times \mathcal{A}$ cumple la condición [Proposición 2.1.4.\(4\)](#). Por lo tanto:

$Y_{\{1\} \times \mathcal{A}}$ es el cono afín de $X_{\mathcal{A}}$.

Politopos muy amplios

Un politopo de latiz $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es **muy amplio** si para cada vértice $m \in P$ el semigrupo $S_{P,m} := \mathbb{N}(P \cap M - m)$ generado por

$$P \cap M - m = \{m' - m : m' \in P \cap M\}$$

es saturado en M .

Politopos muy amplios

Un politopo de latiz $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es **muy amplio** si para cada vértice $m \in P$ el semigrupo $S_{P,m} := \mathbb{N}(P \cap M - m)$ generado por

$$P \cap M - m = \{m' - m : m' \in P \cap M\}$$

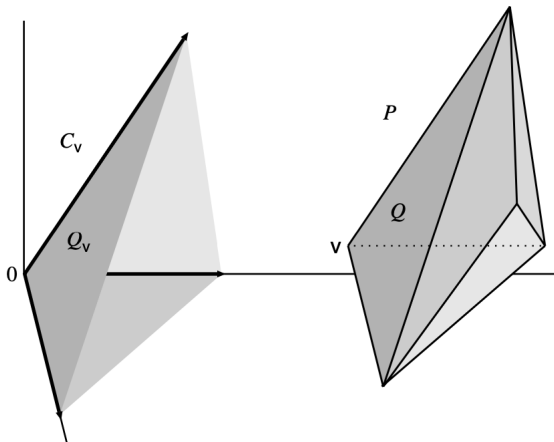
es saturado en M . Sea $\mathcal{A} = P \cap M$ entonces los conjuntos $P \cap M - m$ son de la forma $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - m_i$ y definen las piezas afines de la variedad tórica proyectiva $X_{\mathcal{A}}$. Si los semigrupos $S_i = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$ son saturados, las variedades $Y_{\mathcal{A}_i}$ son normales y definidas por conos.

Por lo tanto politopos muy amplios nos dan otra noción de que es un número suficiente de puntos en la latiz:

Proposición (Proposición 2.2.18)

Cada politopo de latiz normal es muy amplio.

Ejemplo: politopos muy amplios



Prueba de la Proposición 2.2.18

Sea $m_0 \in P$ un vértice y $km \in S_{P, m_0}$ con $k \geq 1$. Hay que mostrar que $m \in S_{P, m_0}$. Sea $P \cap M = \{m_1, \dots, m_s\}$. Escribimos

$$km = \sum_{i=1}^s a_i(m_i - m_0), \quad a_i \in \mathbb{N}.$$

Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $kd \geq \sum_{i=1}^s a_i$. Entonces

$$km + kdm_0 = \sum_{i=1}^s a_i m_i + (kd - \sum_{i=1}^s a_i) m_0 \in kdP \cap M.$$

Por lo tanto $m + dm_0 \in dP \cap M$. Como P es normal tenemos

$$m + dm_0 = \sum_{j=1}^d m_{i_j}, \quad m_{i_j} \in P \cap M.$$

Entonces, $m = \sum_{j=1}^d (m_{i_j} - m) \in S_{P, m_0}$. ■

§2.3 La variedad tórica de un politopo muy amplio

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo muy amplio con respecto a la latiz M . Sea $P \cap M = \{m_1, \dots, m_s\}$. Definimos $X_{P \cap M}$ como la cerradura de Zariski de la imagen de

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, \quad t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Sean x_1, \dots, x_s las coordenadas de \mathbb{P}^{s-1} y $U_i = V(x_i) \subset \mathbb{P}^{s-1}$.

§2.3 La variedad tórica de un politopo muy amplio

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo muy amplio con respecto a la latiz M . Sea $P \cap M = \{m_1, \dots, m_s\}$. Definimos $X_{P \cap M}$ como la cerradura de Zariski de la imagen de

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, \quad t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Sean x_1, \dots, x_s las coordenadas de \mathbb{P}^{s-1} y $U_i = V(x_i) \subset \mathbb{P}^{s-1}$.

Teorema (Teorema 2.3.1)

Sea $X_{P \cap M}$ la variedad tórica proyectiva del politopo muy amplio $P \subset M_{\mathbb{R}}$ y supongamos P es de dimensión completa.

- 1 Para cada vértice m_i de P la pieza afín $X_{P \cap M} \cap U_i$ es la variedad tórica afín

$$X_{P \cap M} \cap U_i = U_{\sigma_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^{\vee} \cap M])$$

donde $\sigma_i^{\vee} = \text{Cono}(P \cap M - m_i) \subset M_{\mathbb{R}}$ y σ_i es de dimensión completa.

§2.3 La variedad tórica de un politopo muy amplio

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo muy amplio con respecto a la latiz M . Sea $P \cap M = \{m_1, \dots, m_s\}$. Definimos $X_{P \cap M}$ como la cerradura de Zariski de la imagen de

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, \quad t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Sean x_1, \dots, x_s las coordenadas de \mathbb{P}^{s-1} y $U_i = V(x_i) \subset \mathbb{P}^{s-1}$.

Teorema (Teorema 2.3.1)

Sea $X_{P \cap M}$ la variedad tórica proyectiva del politopo muy amplio $P \subset M_{\mathbb{R}}$ y supongamos P es de dimensión completa.

- 1 Para cada vértice m_i de P la pieza afín $X_{P \cap M} \cap U_i$ es la variedad tórica afín

$$X_{P \cap M} \cap U_i = U_{\sigma_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^{\vee} \cap M])$$

donde $\sigma_i^{\vee} = \text{Cono}(P \cap M - m_i) \subset M_{\mathbb{R}}$ y σ_i es de dimensión completa.

- 2 El toro de $X_{P \cap M}$ tiene latiz de caracteres M y por lo tanto es T_N .

Prueba del Teorema 2.3.1

(1) Ya sabemos que los semigrupos $\mathbb{N}(P \cap M - m_i)$ definen las piezas afines de $X_{P \cap M}$ para $m_i \in P$ vértices. Como P es muy amplio, son semigrupos saturados y por lo tanto

$$\mathbb{N}(P \cap M - m_i) = \sigma_i^\vee \cap M$$

donde $\sigma_i^\vee = \text{Cono}(P \cap M - m_i)$. Falta mostrar que σ es de dimensión completa.

Prueba del Teorema 2.3.1

(1) Ya sabemos que los semigrupos $\mathbb{N}(P \cap M - m_i)$ definen las piezas afines de $X_{P \cap M}$ para $m_i \in P$ vértices. Como P es muy amplio, son semigrupos saturados y por lo tanto

$$\mathbb{N}(P \cap M - m_i) = \sigma_i^\vee \cap M$$

donde $\sigma_i^\vee = \text{Cono}(P \cap M - m_i)$. Falta mostrar que σ es de dimensión completa. Como $m_i \in P$ es un vértice tiene un hiperplano de soporte H_{u_i, b_i} con $P \subset H_{u_i, b_i}^+$ y $P \cap H_{u_i, b_i} = \{m_i\}$. Por lo tanto $H_{u_i, 0}$ es un hiperplano de soporte de $\sigma_i^\vee \ni 0$. Proposición 1.2.12 implica que σ_i^\vee es estrictamente convexo entonces σ_i es de dimensión completa.

Prueba del Teorema 2.3.1

(1) Ya sabemos que los semigrupos $\mathbb{N}(P \cap M - m_i)$ definen las piezas afines de $X_{P \cap M}$ para $m_i \in P$ vértices. Como P es muy amplio, son semigrupos saturados y por lo tanto

$$\mathbb{N}(P \cap M - m_i) = \sigma_i^\vee \cap M$$

donde $\sigma_i^\vee = \text{Cono}(P \cap M - m_i)$. Falta mostrar que σ es de dimensión completa. Como $m_i \in P$ es un vértice tiene un hiperplano de soporte H_{u_i, b_i} con $P \subset H_{u_i, b_i}^+$ y $P \cap H_{u_i, b_i} = \{m_i\}$. Por lo tanto $H_{u_i, 0}$ es un hiperplano de soporte de $\sigma_i^\vee \ni 0$. Proposición 1.2.12 implica que σ_i^\vee es estrictamente convexo entonces σ_i es de dimensión completa.

(2) Nota que $\dim \sigma_i^\vee = \dim P$ entonces, σ_i es estrictamente convexo. En este caso el Teorem 1.2.18 implica que el toro de U_{σ_i} es T_N . Tenemos

$$T_N \subseteq U_{\sigma_i} = (X_{P \cap M} \cap U_i) \subseteq X_{P \cap M}$$

por lo tanto T_N es el toro de $X_{P \cap M}$. ■

El abanico normal de un politopo

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Escribimos su presentación con respecto a las facetas

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ para cada faceta } F \prec P\}$$

Sea $v \in P$ un vértice, definimos $C_v = \text{Cono}(P \cap M - v) \subset M_{\mathbb{R}}$ y $\sigma_v = C_v^{\vee} \subset N_{\mathbb{R}}$.

El abanico normal de un politopo

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Escribimos su presentación con respecto a las facetas

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ para cada faceta } F \prec P\}$$

Sea $v \in P$ un vértice, definimos $C_v = \text{Cono}(P \cap M - v) \subset M_{\mathbb{R}}$ y $\sigma_v = C_v^{\vee} \subset N_{\mathbb{R}}$. Tenemos una biyección

$$\{Q \prec P : v \in Q\} \longleftrightarrow \{Q_v \prec C_v\}$$

donde $Q \mapsto Q_v := \text{Cono}(Q \cap M - v)$ y para una cara $Q_v \prec C_v$ definimos $Q_v \mapsto (Q_v + v) \cap P$.

Ejercicio 2.3.2: La biyección preserva dimensiones, inclusiones e intersecciones.

El abanico normal de P

En particular, tenemos una presentación

$$C_v = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq 0 : F \prec P \text{ faceta}, v \in F\}$$

por lo tanto el cono dual satisface $\sigma_v = \text{Cono}(u_F : F \prec P \text{ faceta}, v \in F)$. Podemos generalizar la construcción para caras $Q \preceq P$ y obtenemos $\sigma_Q = \text{Cono}(u_F : F \prec P \text{ faceta}, Q \prec F)$. Nota que σ_F es el rayo generado por $u_F \in N$ y $\sigma_P = \text{Cono}(\emptyset) = \{0\}$.

El abanico normal de P

En particular, tenemos una presentación

$$C_v = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u_F \rangle \geq 0 : F \prec P \text{ faceta}, v \in F\}$$

por lo tanto el cono dual satisface $\sigma_v = \text{Cono}(u_F : F \prec P \text{ faceta}, v \in F)$. Podemos generalizar la construcción para caras $Q \preceq P$ y obtenemos $\sigma_Q = \text{Cono}(u_F : F \prec P \text{ faceta}, Q \prec F)$. Nota que σ_F es el rayo generado por $u_F \in N$ y $\sigma_P = \text{Cono}(\emptyset) = \{0\}$.

Teorema (Teorema 2.3.2)

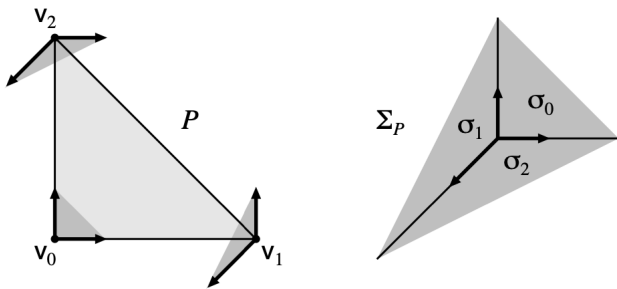
Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa y sea $\Sigma_P := \{\sigma_Q : Q \preceq P\}$.

- 1 Cada cara de σ_Q también pertenece a Σ_P .
- 2 La intersección $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'}$ para $Q, Q' \preceq P$ también pertenece a Σ_P .

Cada conjunto finito de conos racionales poliedrales estrictamente convexos que cumpla (1) y (2) se llama un **abanico**, Σ_P se llama el **abanico normal (interior) de P** .

Ejemplo: el abanico normal

Consideramos el simplex $\Delta_2 = \text{Conv}(0, e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^2$ y sea para $k > 0$ el polítopo $P = k\Delta_2$.



Nota que los conos $C_{v_0}, C_{v_1}, C_{v_2}$ no forman un abanico, pero sus conos duales sí.

Caras y sus conos

Lema (Lema 2.3.5)

Sea $Q \prec P$ una cara y $H_{u,b}$ un hiperplano de soporte de P . Entonces,

$$Q \subseteq H_{u,b} \cap P \iff u \in \sigma_Q.$$

Caras y sus conos

Lema (Lema 2.3.5)

Sea $Q \prec P$ una cara y $H_{u,b}$ un hiperplano de soporte de P . Entonces,

$$Q \subseteq H_{u,b} \cap P \iff u \in \sigma_Q.$$

Proposición (Proposición 2.3.7)

Sean Q y Q' caras de un politopo de latiz $P \subset M_{\mathbb{R}}$ de dimensión completa. Entonces,

- 1 $Q \subset Q'$ si y solo si $\sigma_Q \supset \sigma_{Q'}$.
- 2 Si $Q \subset Q'$ entonces $\sigma_{Q'}$ es una cara de σ_Q y todas las caras de σ_Q son de esta forma.
- 3 $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'} = \sigma_{Q''}$ donde Q'' es la cara minimal de P que contiene Q y Q' .

Piezas afines de $X_{P \cap M}$

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz muy amplio con dimensión completa y sea $s = |P \cap M|$ entonces $X_{P \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Sea $v \in P$ un vértice y $X_{P \cap M} \cap U_v$ la pieza afín asociada. **Teorema 2.3.1** implica

$$X_{P \cap M} \cap U_v = U_{\sigma_v} = \text{Spec}(\mathbb{C}[C_v \cap M]).$$

Es, los conos maximales $\sigma_v \in \Sigma_p$ determinan las piezas afines de $X_{P \cap M}$.

Piezas afines de $X_{P \cap M}$

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz muy amplio con dimensión completa y sea $s = |P \cap M|$ entonces $X_{P \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1}$. Sea $v \in P$ un vértice y $X_{P \cap M} \cap U_v$ la pieza afín asociada. **Teorema 2.3.1** implica

$$X_{P \cap M} \cap U_v = U_{\sigma_v} = \text{Spec}(\mathbb{C}[C_v \cap M]).$$

Es, los conos maximales $\sigma_v \in \Sigma_P$ determinan las piezas afines de $X_{P \cap M}$.

Proposición (Proposición 2.3.13)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz muy amplio, $v \neq w$ vértices de P y $Q \prec P$ la cara más pequeña que contiene v y w . Tenemos

$$X_{P \cap M} \cap U_v \cap U_w = U_{\sigma_Q} = \text{Spec}(\mathbb{C}[C_Q \cap M]).$$

Además, las inclusiones

$(X_{P \cap M} \cap U_v) \supset (X_{P \cap M} \cap U_v \cap U_w) \subset (X_{P \cap M} \cap U_w)$ se pueden escribir como

$$U_{\sigma_v} \supset (U_{\sigma_v})_{\chi^{w-v}} = U_{\sigma_Q} = (U_{\sigma_w})_{\chi^{v-w}} \subset U_{\sigma_w}.$$

Prueba de la Proposición 2.3.13

Ya sabemos del **Ejercicio Prop. 2.1.4** que

$$X_{P \cap M} \cap U_V \cap U_W = (U_{\sigma_V})_{\chi^{w-v}} = (U_{\sigma_W})_{\chi^{v-w}}.$$

Falta verificar que $(U_{\sigma_V})_{\chi^{w-v}} = U_{\sigma_Q}$. Tenemos $w - v \in C_V = \sigma_V^\vee$ por lo tanto $H_{w-v} \cap \sigma_V = \tau$ es una cara de σ_V . En esta situación uno puede mostrar que $(U_{\sigma_V})_{\chi^{w-v}} = U_\tau$.

P.D.: $U_\tau = U_{\sigma_Q}$, es decir $H_{w-v} \cap \sigma_V = \sigma_Q$.

Continuación de la prueba de la Proposición 2.3.13

Sabemos que $\sigma_v \cap \sigma_w = \sigma_Q$. En este caso la **Proposición 2.3.7(3)** implica que es suficiente verificar que $H_{w-v} \cap \sigma_v = \sigma_v \cap \sigma_w$. Sea $u \in H_{w-v} \cap \sigma_v$. Si $u \neq 0$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $H_{u,b}$ es un hiperplano de soporte de P .

Además $u \in \sigma_v$ implica que $v \in H_{u,b}$ (**Lema 2.3.5**), entonces $w \in H_{u,b}$ porque $u \in H_{w-v}$. Por lo tanto $u \in \sigma_w$ (**Lema 2.3.5**).

Para la inclusión reversa toma $u \in \sigma_v \cap \sigma_w$. Si $u \neq 0$ sea $b \in \mathbb{R}$ como anteriormente. Entonces, $u \in \sigma_v \cap \sigma_w$ y el **Lema 2.3.5** implica que $v, w \in H_{u,b}$. Por lo tanto $u \in H_{w-v}$. ■

La variedad tórica de un politopo de latiz

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz. Definimos la **variedad tórica proyectiva de P**

$$X_P := X_{kP \cap M}$$

donde $k \geq 1$ es tal que kP es muy amplio. Dado la Proposición 2.2.18 y el Teorema 2.2.12 sabemos que tal k existe. ¿Qué pasa si tomamos $k, \ell \geq 1$ tal kP y ℓP son muy amplios?

La variedad tórica de un politopo de latiz

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz. Definimos la **variedad tórica proyectiva de P**

$$X_P := X_{kP \cap M}$$

donde $k \geq 1$ es tal que kP es muy amplio. Dado la Proposición 2.2.18 y el Teorema 2.2.12 sabemos que tal k existe. ¿Qué pasa si tomamos $k, \ell \geq 1$ tal kP y ℓP son muy amplios?

Nota que para cada vértice m de P tenemos que km y ℓm son vértices de kP y ℓP , respectivamente. Además,

$$\text{Cono}(kP \cap M - km) = \text{Cono}(\ell P \cap M - \ell m)$$

por lo tanto las piezas afines de $X_{kP \cap M}$ y $X_{\ell P \cap M}$ coinciden. En particular, $X_{kP \cap M}$ y $X_{\ell P \cap M}$ son la misma *variedad abstracta*, lo que cambia es el encaje:

$$X_{kP \cap M} \subseteq \mathbb{P}^{\#(kP \cap M) - 1} \quad \text{y} \quad X_{\ell P \cap M} \subseteq \mathbb{P}^{\#(\ell P \cap M) - 1}.$$

§2.4 Propiedades de variedades tóricas proyectivas

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva.

- 1 X es **normal** si existe una cobertura de piezas afines $\{V_\alpha : \alpha\}$ de X tal que cada V_α es normal.
- 2 X es **proyectivamente normal** si su cono afín $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ es normal.

Teorema (Teorema 2.4.1)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Entonces,

- 1 X_P es normal
- 2 X_P es proyectivamente normal en el encaje definido por kP , $k > 0$ si y solo si kP es normal.

Prueba del Teorema 2.4.1

(1) X_P es la unión de las piezas afines $\{U_{\sigma_v} : v \in P \text{ vértice}\}$. El **Teorema 1.3.5** implica que U_{σ_v} es normal.

(2) Tenemos $X_P = X_{kP \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ donde $s = |kP \cap M|$. Entonces, hay que mostrar que el cono afín $\widehat{X}_{kP \cap M}$ es normal. Ya vimos que

$$\widehat{X}_{kP \cap M} = Y_{\{1\} \times (kP \cap M)}$$

Teorema 1.3.5 implica que $Y_{\{1\} \times (kP \cap M)}$ es normal si y solo si el semigrupo $\mathbb{N}(\{1\} \times (kP \cap M)) \subset \mathbb{Z} \times M$ es saturado. Como kP es normal el **Lema 2.2.14** implica que $\{1\} \times (kP \cap M)$ es un conjunto de generadores para el semigrupo $C(kP) \cap (\mathbb{Z} \times M)$. Por lo tanto $\mathbb{N}(\{1\} \times (kP \cap M))C(kP) \cap (\mathbb{Z} \times M)$ y es saturado.

Variedades tóricas proyectivas suaves

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz, $v \in P$ un vértice y $E \prec P$ una arista con $v \in E$. Definimos w_E como el generador minimal del rayo $\text{Cono}(E - v)$, es el primer punto de M en E diferente de v .

P se llama **suave** si para cada vértice $v \in P$ el conjunto $\{w_E - v : v \in E \prec P \text{ arista}\}$ es un subconjunto de una base de M . En particular, si $\dim P = \dim M_{\mathbb{R}}$ el conjunto debe ser una base de M .

Teorema (Teorema 2.4.3)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- 1 X_P es una variedad proyectiva suave.
- 2 Σ_P es un abanico suave (i.e. cada cono $\sigma \in \Sigma_P$ es suave).
- 3 P es suave.

Ejemplo

Sea $P = \text{Conv}(0, e_1, 2e_2) \subset \mathbb{R}^2$. Nota que P es normal y por lo tanto es muy amplio. Entonces, $P \cap \mathbb{Z}^2 = \{0, e_1, e_2, 2e_2\}$ define X_P como la cerradura de la imagen de

$$[s : t] \mapsto [1 : s : t : s^2] \subset \mathbb{P}^3.$$

Si x, y, z, w son las coordenadas de \mathbb{P}^3 tenemos

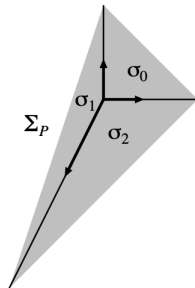
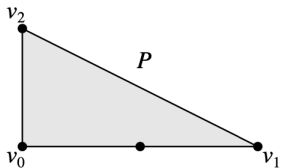
$$X_P = V(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^3$$

Por lo tanto X_P es el espacio proyectivo con pesos $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ (**Ejemplo 2.0.5**).

¿Es suave X_P ?

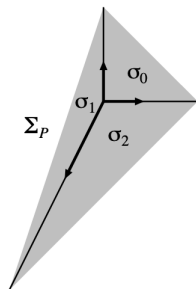
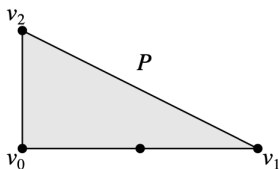
Ejemplo

Analizamos P y Σ_P , ¿son suaves?



Ejemplo

Analizamos P y Σ_P , ¿son suaves?



Para v_0 tenemos $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, para v_1 es $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -1$, pero para v_2 tenemos $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$. En Σ_P vemos que σ_2 no es suave.

De hecho con la correspondencia entre orbitas y conos se sabe que σ_2 corresponde al punto fijo no suave $[0 : 0 : 0 : 1] \in X_P$.

Prueba del Teorema 2.4.3

(1) \Leftrightarrow (2) Recuerda que una variedad es suave si es suave en cada punto, por lo tanto ser suave es una propiedad local que podemos verificar en la piezas afines:

$$X_P \text{ es suave} \iff U_{\sigma_v} \text{ es suave para cada } v \in P \text{ vértice}$$

Teorema 1.3.12 implica que U_{σ_v} es suave si y solo si σ_v es suave. Como caras de conos suaves son suave, vemos que X_P es suave si y solo si Σ_P es suave.

Prueba del Teorema 2.4.3

(1) \Leftrightarrow (2) Recuerda que una variedad es suave si es suave en cada punto, por lo tanto ser suave es una propiedad local que podemos verificar en la piezas afines:

$$X_P \text{ es suave} \iff U_{\sigma_v} \text{ es suave para cada } v \in P \text{ vértice}$$

Teorema 1.3.12 implica que U_{σ_v} es suave si y solo si σ_v es suave. Como caras de conos suaves son suave, vemos que X_P es suave si y solo si Σ_P es suave.

(2) \Leftrightarrow (3) Sea $v \in P$ un vértice y $C_v = \text{Cono}(P \cap M - v)$. Nota que los generadores minimales de C_v son los $w_E - v$ para $v \in E \prec P$ una arista. Por lo tanto

$$P \text{ es suave} \iff C_v \text{ es suave para cada vértice } v \in P.$$

Además tenemos que C_v es suave si y solo si su cono dual σ_v es suave (la base dual de una base de M es una base de N). Entonces, P es suave si y solo si Σ_P es suave. ■