Curso: degeneraciones tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

agosto 30 2022

Politopos muy amplios y normales

Corolario (Corolario 2.2.13)

Cada poligono de latiz $P \subset \mathbb{R}^2$ es normal.

Corolario (Corolario 2.2.19)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un politopo de latiz de dimensión completa.

1. Si $\dim P \geq 2$ entonces kP es muy amplio para cada $k \geq n - 1$.
2. Si $\dim P = 2$, entonces P es muy amplio.

Un politopo muy amplio no normal

Ejemplo 2.2.20: En $\mathbb{Z}^6$ definimos el conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ m_{ijk} := e_i + e_j + e_k : \{i, j, k\} \in \binom{[6]}{3} \right\}$$

y sea $P = \mathrm{Conv}(\mathcal{A})$. Nota que $\mathcal{A} = P \cap \mathbb{Z}^6$. Además

$$\sum_{i=1}^{6} e_i = \frac{1}{5} \sum_{(i,j,k)} m_{ijk} = \frac{1}{10} \sum_{(i,j,k)} 2m_{ijk} \in 2P.$$

Entonces, P no es normal. Pero se puede verificar que es muy amplio.

La función y la serie de Hilbert

Sea $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ un $\mathbb{C}$-álgebra graduada, finitamente generada en grado uno. Sea M un S-módulo graduado cuyos componenetes graduadas son de dimensión finita. Definimos la **función de Hilbert de** M

$$\mathcal{H}(M, \cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad d \mapsto \dim(M_d)$$

La serie formal de Laurent $\mathcal{H}_M(t) := \sum_{d \geq 0} \mathcal{H}(M, d) t^d$ se llama la **serie de Hilbert de** M.

La función y la serie de Hilbert

Sea $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ un $\mathbb{C}$-álgebra graduada, finitamente generada en grado uno. Sea M un S-módulo graduado cuyos componenetes graduadas son de dimensión finita. Definimos la **función de Hilbert de** M

$$\mathcal{H}(M, \cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad d \mapsto \dim(M_d)$$

La serie formal de Laurent $\mathcal{H}_M(t) := \sum_{d \geq 0} \mathcal{H}(M, d) t^d$ se llama la **serie de Hilbert de** M.

Ejemplo

Sea $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Nota que para cada $d \geq 0$ los monomios de grado d son una base de S_d. Por lo tanto

$$\mathcal{H}(S, d) = \binom{n + d - 1}{d} = \binom{n + d - 1}{n - 1}, \quad \mathcal{H}_S(t) = \frac{1}{(1 - t)^n}.$$

Nota que $\mathcal{H}(S, d)$ es un polinomio de grado $n - 1$ en d y $\mathcal{H}_S(t)$ es una función racional con un único polo en $t = 1$.

Teorema: El polinomio de Hilbert

Teorema

Sea $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ un $\mathbb{C}$-álgebra graduada, finitamente generada en grado uno. Sea M un S-módulo graduado finitamente generado de dimensión d.

1. Existe un polinomio de Laurent $Q_M(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ con $Q_M(1) > 0$ tal que

$$\mathcal{H}_M(t) = \frac{Q_M(t)}{(t-1)^d}$$

Teorema: El polinomio de Hilbert

Teorema

Sea $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ un $\mathbb{C}$-álgebra graduada, finitamente generada en grado uno. Sea M un S-módulo graduado finitamente generado de dimensión d.

1. Existe un polinomio de Laurent $Q_M(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ con $Q_M(1) > 0$ tal que
$$\mathcal{H}_M(t) = \frac{Q_M(t)}{(t-1)^d}$$
2. Existe un polinomio $H_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado $d-1$ que se llama el **polinomio de Hilbert de** M tal que
$$\mathcal{H}(M, i) = H_M(i) \text{ para todas } i > \deg(Q_M) - d.$$

Prueba: ver **[Teorema 6.1.3, HH11]**

Consecuencias

Corolario (p.99 en §6.1 de HH11)

Si $M = S/I$ es el anillo de coordenadas de una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de dimensión $d-1$ tenemos

1. $\deg(H_M(t)) = \dim X$.

Consecuencias

Corolario (p.99 en §6.1 de HH11)

Si $M = S/I$ es el anillo de coordenadas de una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de dimensión $d-1$ tenemos

1. $\deg(H_M(t)) = \dim X$.
2. El orden del polo de la función de Hilbert $H_M(t)$ en $t = 1$ es d.

Consecuencias

Corolario (p.99 en §6.1 de HH11)

Si $M = S/I$ es el anillo de coordenadas de una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de dimensión $d-1$ tenemos

1. $\deg(H_M(t)) = \dim X$.
2. El orden del polo de la función de Hilbert $H_M(t)$ en $t = 1$ es d.
3. El **grado de** $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es $Q_M(1)$, además $Q_M(1)/(d-1)!$ es el coeficiente principal del polinomio de Hilbert $H_M(t)$.

El polinomio de Ehrhart

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Definimos

$$L(P) = |P \cap M| \quad \text{y} \quad L^\circ(P) = |P^\circ \cap M|$$

El polinomio de Ehrhart

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Definimos

$$L(P) = |P \cap M| \quad \text{y} \quad L^{\circ}(P) = |P^{\circ} \cap M|$$

Teorema (Reciprocidad de Ehrhart)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Entonces,

1. Existe un polinomio $E_P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, que se llama el **polinomio de Ehrhart de** P, tal que para $k \in \mathbb{N}$

$$E_P(k) = L(kP).$$

El polinomio de Ehrhart

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Definimos

$$L(P) = |P \cap M| \quad \text{y} \quad L^{\circ}(P) = |P^{\circ} \cap M|$$

Teorema (Reciprocidad de Ehrhart)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Entonces,

1. Existe un polinomio $E_P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, que se llama el **polinomio de Ehrhart de** P, tal que para $k \in \mathbb{N}$

$$E_P(k) = L(kP).$$

2. Si $k > 0$ entonces $E_P(-k) = (-1)^n L^{\circ}(kP)$.

El polinomio de Ehrhart

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Definimos

$$L(P) = |P \cap M| \quad \text{y} \quad L^{\circ}(P) = |P^{\circ} \cap M|$$

Teorema (Reciprocidad de Ehrhart)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de latiz de dimensión completa. Entonces,

1. Existe un polinomio $E_P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, que se llama el **polinomio de Ehrhart de** P, tal que para $k \in \mathbb{N}$
$$E_P(k) = L(kP).$$
2. Si $k > 0$ entonces $E_P(-k) = (-1)^n L^{\circ}(kP)$.
3. Si P es muy amplio el polinomio de Ehrhart $E_P(x)$ es el polinomio de Hilbert $H_{S/I}(x)$ del anillo de coordenadas S/I de $X_P = V(I) \subset \mathbb{P}^{|P \cap M|-1}$.

El polinomio de Hilbert de una variedad proyectiva tórica

Sea $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, $e_1, \dots, e_n$ la base estandar y $\Delta_n = \mathrm{Conv}(0, e_1, \dots, e_n)$. Definimos el **volumen normalizado en** $M_{\mathbb{R}}$ como la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ escalada tal que $\mathrm{Vol}(\Delta_n) = 1$. Nota que el cubo $C_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ cumple $\mathrm{Vol}(C_n) = n!$.

El polinomio de Hilbert de una variedad proyectiva tórica

Sea $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ la base estandar y $\Delta_n = \mathrm{Conv}(0, e_1, \ldots, e_n)$. Definimos el **volumen normalizado en** $M_{\mathbb{R}}$ como la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ escalada tal que $\mathrm{Vol}(\Delta_n) = 1$. Nota que el cubo $C_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ cumple $\mathrm{Vol}(C_n) = n!$.

Un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ de dimensión completa tiene

$$\frac{\mathrm{Vol}(P)}{n!} = \lim_{k \to \infty} \frac{L(kP)}{k^n}$$

El polinomio de Hilbert de una variedad proyectiva tórica

Sea $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ la base estandar y $\Delta_n = \mathrm{Conv}(0, e_1, \ldots, e_n)$. Definimos el **volumen normalizado en** $M_{\mathbb{R}}$ como la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ escalada tal que $\mathrm{Vol}(\Delta_n) = 1$. Nota que el cubo $C_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ cumple $\mathrm{Vol}(C_n) = n!$.

Un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ de dimensión completa tiene

$$\frac{\mathrm{Vol}(P)}{n!} = \lim_{k \to \infty} \frac{L(kP)}{k^n}$$

Corolario (Ejercicio 9.4.7, CLS11)

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ un politopo de latiz muy amplio de dimensión completa y $X_P = V(I) \subset \mathbb{P}^{|P \cap M|-1}$. Entonces, el grado de $H_{S/I}(x)$ es n y el coeficiente principal es

$$\frac{\mathrm{Vol}(P)}{n!}.$$

Por lo tanto, $\deg(X_P) = \mathrm{Vol}(P)$.

Variedades tóricas

§3.2 Correspondencia entre conos y orbitas (Teorema 3.2.6, Proposicon 3.2.7)

Variedades tóricas

§3.2 Correspondencia entre conos y orbitas (Teorema 3.2.6, Proposicon 3.2.7)

§3.3 Morfismo entre variedades toricas normales y aplicaciones entre abanicos (Proposición 3.3.7)

Variedades tóricas

- §3.2 Correspondencia entre conos y orbitas (Teorema 3.2.6, Proposicon 3.2.7)
- §3.3 Morfismo entre variedades toricas normales y aplicaciones entre abanicos (Proposición 3.3.7)
- §4.1/3 Divisores de Weil y los poliedros de sus secciones (Teorema 4.1.3 y Proposición 4.3.3)

Variedades tóricas

- §3.2 Correspondencia entre conos y orbitas (Teorema 3.2.6, Proposicon 3.2.7)
- §3.3 Morfismo entre variedades toricas normales y aplicaciones entre abanicos (Proposición 3.3.7)
- §4.1/3 Divisores de Weil y los poliedros de sus secciones (Teorema 4.1.3 y Proposición 4.3.3)
- §4.2 Divisores de Cartier y funciones de soporte en abanicos (Teorema 4.2.12)

Variedades tóricas

- §3.2 Correspondencia entre conos y orbitas (Teorema 3.2.6, Proposicon 3.2.7)
- §3.3 Morfismo entre variedades toricas normales y aplicaciones entre abanicos (Proposición 3.3.7)
- §4.1/3 Divisores de Weil y los poliedros de sus secciones (Teorema 4.1.3 y Proposición 4.3.3)
- §4.2 Divisores de Cartier y funciones de soporte en abanicos (Teorema 4.2.12)
- §5.1 Construyendo variedades tóricas como cocientes (Proposición 5.1.9 y 5.1.11)

Familias de variedades

Nuestro deseo intrínseco es entender todas las variedades proyectivas, es decir clasificar las.

¿Cuales son *clases* o *familias de variedades* razonables?

Familias de variedades

Nuestro deseo intrínseco es entender todas las variedades proyectivas, es decir clasificar las.

¿Cuales son *clases* o *familias de variedades* razonables?

Queremos que las variedades en una familia se parecen, es decir que comparten varias propiedades, por ejemplo su polinomio de Hilbert.

Familias de variedades

Nuestro deseo intrínseco es entender todas las variedades proyectivas, es decir clasificar las.

¿Cuales son *clases* o *familias de variedades* razonables?

Queremos que las variedades en una familia se parecen, es decir que comparten varias propiedades, por ejemplo su polinomio de Hilbert.

Resulta que hay un concepto en álgebra que parece como *llave mágica*:

Familias de variedades

Nuestro deseo intrínseco es entender todas las variedades proyectivas, es decir clasificar las.

¿Cuales son *clases* o *familias de variedades* razonables?

Queremos que las variedades en una familia se parecen, es decir que comparten varias propiedades, por ejemplo su polinomio de Hilbert.

Resulta que hay un concepto en álgebra que parece como *llave mágica*:

- **Serre** introdujo el concepto de **planitud** en su articulo GAGA para puras razones algebraicas y su interpretación geométrica parece lejos de la intuición.

Familias de variedades

Nuestro deseo intrínseco es entender todas las variedades proyectivas, es decir clasificar las.

¿Cuales son *clases* o *familias de variedades* razonables?

Queremos que las variedades en una familia se parecen, es decir que comparten varias propiedades, por ejemplo su polinomio de Hilbert.

Resulta que hay un concepto en álgebra que parece como *llave mágica*:

- **Serre** introdujo el concepto de **planitud** en su articulo GAGA para puras razones algebraicas y su interpretación geométrica parece lejos de la intuición.
- **Grothendieck** reconoció su valor geométrico.

Familias de variedades

Nuestro deseo intrínseco es entender todas las variedades proyectivas, es decir clasificar las.

¿Cuales son *clases* o *familias de variedades* razonables?

Queremos que las variedades en una familia se parecen, es decir que comparten varias propiedades, por ejemplo su polinomio de Hilbert.

Resulta que hay un concepto en álgebra que parece como *llave mágica*:

- **Serre** introdujo el concepto de **planitud** en su articulo GAGA para puras razones algebraicas y su interpretación geométrica parece lejos de la intuición.
- **Grothendieck** reconoció su valor geométrico.
- **Mumford:** "*El concepto de planitud es un enigma que sale del álgebra, pero que técnicamente es la respuesta a muchas oraciones.*"

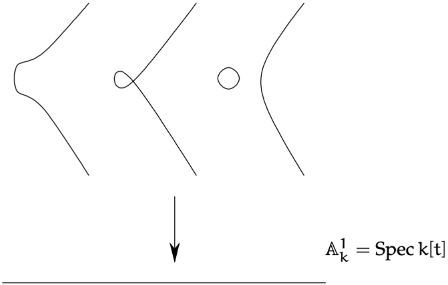
[Vakil, §24.1]

Ejemplo

En $\mathbb{C}^3$ consideramos la variedad $Y = V(y^3 - x^3 + tx^2)$. Sea $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}_t$ la proyección canónica.

Ejemplo

En $\mathbb{C}^3$ consideramos la variedad $Y = V(y^3 - x^3 + tx^2)$. Sea $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}_t$ la proyección canónica. Las fibras de $\pi|_Y$ varían entre curvas suaves y la curva nodal:



Es un ejemplo de una familia plana.

Módulos planos

Sea A un álgebra y M un A-módulo. Recuerda que el functor $M \otimes_A -$ de A-modulos es **exacto del lado derecho**: es decir para cada secuencia exacta de A-modulos

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

la siguiente secuencia es exacta

$$M \otimes_A M_1 \to M \otimes_A M_2 \to M \otimes_A M_3 \to 0$$

Módulos planos

Sea A un álgebra y M un A-módulo. Recuerda que el functor $M \otimes_A -$ de A-modulos es **exacto del lado derecho**: es decir para cada secuencia exacta de A-modulos

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

la siguiente secuencia es exacta

$$M \otimes_A M_1 \to M \otimes_A M_2 \to M \otimes_A M_3 \to 0$$

El A-modulo M es **plano** si para cada secuencia exacta corta de A-modulos

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

la siguiente secuencia es exacta:

$$0 \to M \otimes_A M_1 \to M \otimes_A M_2 \to M \otimes_A M_3 \to 0$$

Es decir, $M \otimes_A -$ es un functor **exacto**.

Módulos libres son planos

Lema

Sea F un A-módulo libre, entonces F es plano.

Módulos libres son planos

Lema

Sea F un A-módulo libre, entonces F es plano.

Prueba: Sea $\iota : M' \to M$ la inclusión de un A-submódulo M' en el A-módulo M. Tenemos que mostrar que

$$\varphi : F \otimes_A M \to F \otimes_A M'$$

es una inyección. Recueda que módulos libres son de forma $F = \bigoplus_{i \in I} A$.

Módulos libres son planos

Lema

Sea F un A-módulo libre, entonces F es plano.

Prueba: Sea $\iota : M' \to M$ la inclusión de un A-submódulo M' en el A-módulo M. Tenemos que mostrar que

$$\varphi : F \otimes_A M \to F \otimes_A M'$$

es una inyección. Recueda que módulos libres son de forma $F = \bigoplus_{i \in I} A$. Por lo tanto, tenemos

$$F \otimes_A M = \bigoplus_{i \in I} A \otimes_A M = \bigoplus_{i \in I} M.$$

Módulos libres son planos

Lema

Sea F un A-módulo libre, entonces F es plano.

Prueba: Sea $\iota : M' \to M$ la inclusión de un A-submódulo M' en el A-módulo M. Tenemos que mostrar que

$$\varphi : F \otimes_A M \to F \otimes_A M'$$

es una inyección. Recueda que módulos libres son de forma $F = \bigoplus_{i \in I} A$. Por lo tanto, tenemos

$$F \otimes_A M = \bigoplus_{i \in I} A \otimes_A M = \bigoplus_{i \in I} M.$$

Entonces el homomorfismo φ es de forma

$$\oplus_{i \in I} \iota : \bigoplus_{i \in I} M' \to \bigoplus_{i \in I} M.$$

Entonces, ι siendo inyectivo implica que $\oplus_{i \in I} \iota$ es inyectivo.

Localización es plana

Proposición (Proposición 2.5, Eisendbud)

Sea A un álgebra y $S \subset A$ un conjunto cerrado bajo multiplicación. Entonces, $A[S^{-1}]$ es un A-módulo plano. Dicha en otra manera: la localización preserva submodulos.

Localización es plana

Proposición (Proposición 2.5, Eisendbud)

Sea A un álgebra y $S \subset A$ un conjunto cerrado bajo multiplicación. Entonces, $A[S^{-1}]$ es un A-módulo plano. Dicha en otra manera: la localización preserva submodulos.

Prueba: Sean $M' \subset M$ un A-modulo y un A-submodulo. Hay que mostrar que el siguiente homomorfismo es inyectivo:

$$A[S^{-1}] \otimes_A M' \to A[S^{-1}] \otimes_A M.$$

Localización es plana

Proposición (Proposición 2.5, Eisendbud)

Sea A un álgebra y $S \subset A$ un conjunto cerrado bajo multiplicación. Entonces, $A[S^{-1}]$ es un A-módulo plano. Dicha en otra manera: la localización preserva submodulos.

Prueba: Sean $M' \subset M$ un A-modulo y un A-submodulo. Hay que mostrar que el siguiente homomorfismo es inyectivo:

$$A[S^{-1}] \otimes_A M' \to A[S^{-1}] \otimes_A M.$$

Consideramos la composición $\varphi : M' \to M \to M[S^{-1}]$ y su extensión a la localización de M':

$$\varphi_{[S^{-1}]} : M'[S^{-1}] \to M[S^{-1}].$$

Hay que mostrar que $\varphi_{[S^{-1}]}$ es inyectivo.

Localización es plana

Proposición (Proposición 2.5, Eisendbud)

Sea A un álgebra y $S \subset A$ un conjunto cerrado bajo multiplicación. Entonces, $A[S^{-1}]$ es un A-módulo plano. Dicha en otra manera: la localización preserva submodulos.

Prueba: Sean $M' \subset M$ un A-modulo y un A-submodulo. Hay que mostrar que el siguiente homomorfismo es inyectivo:

$$A[S^{-1}] \otimes_A M' \to A[S^{-1}] \otimes_A M.$$

Consideramos la composición $\varphi : M' \to M \to M[S^{-1}]$ y su extensión a la localización de M':

$$\varphi_{[S^{-1}]} : M'[S^{-1}] \to M[S^{-1}].$$

Hay que mostrar que $\varphi_{[S^{-1}]}$ es inyectivo. Sea $m \in M'$ tal que $\varphi_{[S^{-1}]}(m/s) = 0$ para algún $s \in S$. Entonces existe $s' \in S$ tal que $s'm = 0$ en M. En particular, $s'm = 0$ también vale en $M' \subset M$ y así $m/s = 0$ en $M'[S^{-1}]$. ■

Planitud es una propiedad local

Ejercicio 24.2.C Sea M un A-modulo plano y A un B-álgebra plana. Entonces, M es un B-módulo plano.

Planitud es una propiedad local

Ejercicio 24.2.C Sea M un A-modulo plano y A un B-álgebra plana. Entonces, M es un B-módulo plano.

Proposición (Proposición 24.2.3 Vakil)

Un A-módulo M es plano si y solo si M_p es un A_p-módulo plano para cada ideal primo $p \subset A$.

Planitud es una propiedad local

Ejercicio 24.2.C Sea M un A-modulo plano y A un B-álgebra plana. Entonces, M es un B-módulo plano.

Proposición (Proposición 24.2.3 Vakil)

Un A-módulo M es plano si y solo si M_p es un A_p-módulo plano para cada ideal primo $p \subset A$.

Prueba: Sea N un A-módulo. Nota que $M \otimes_A N$ es canonicamente isomorfo a $M_p \otimes_{A_p} N$ para cada $p \subset A$ primo.

$\Rightarrow$ Por lo tanto, si M es plano, entonces M_p lo es.

Continuación de la prueba de la Proposición 24.2.3

$\Leftarrow$ Sea M_p un A_p-módulo plano para todos los ideales primos $p \subset A$ y sea

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

una secuencia exacta corta. Como $\otimes$ es exacto del lado derecho tenemos una secuencia exacta

$$0 \to K \to M \otimes_A N' \xrightarrow{\varphi} M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0 \quad (*)$$

donde K es el núcleo de φ. **P.D.:** $K = 0$.

Continuación de la prueba de la Proposición 24.2.3

$\Leftarrow$ Sea M_p un A_p-módulo plano para todos los ideales primos $p \subset A$ y sea

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

una secuencia exacta corta. Como $\otimes$ es exacto del lado derecho tenemos una secuencia exacta

$$0 \to K \to M \otimes_A N' \xrightarrow{\varphi} M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0 \quad (*)$$

donde K es el núcleo de φ. **P.D.:** $K = 0$. Es suficiente mostrar que $K_p = 0$ para cada $p \subset A$ primo. Como M_p es plano tenemos la secuancia exacta corta

$$0 \to M_p \otimes_{A_p} N' \to M_p \otimes_{A_p} N \to M_p \otimes_{A_p} N'' \to 0$$

Continuación de la prueba de la Proposición 24.2.3

$\Leftarrow$ Sea M_p un A_p-módulo plano para todos los ideales primos $p \subset A$ y sea

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

una secuencia exacta corta. Como $\otimes$ es exacto del lado derecho tenemos una secuencia exacta

$$0 \to K \to M \otimes_A N' \xrightarrow{\varphi} M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0 \quad (*)$$

donde K es el núcleo de φ. **P.D.:** $K = 0$. Es suficiente mostrar que $K_p = 0$ para cada $p \subset A$ primo. Como M_p es plano tenemos la secuancia exacta corta

$$0 \to M_p \otimes_{A_p} N' \to M_p \otimes_{A_p} N \to M_p \otimes_{A_p} N'' \to 0$$

Además, localizando $(*)$ en p y usando que $(M_{\otimes A} N)_p = M_p \otimes_{A_p} N_p$ obtenemos

$$0 \to K_p \to M_p \otimes_{A_p} N'_p \xrightarrow{\varphi_p} M_p \otimes_{A_p} N_p \to M_p \otimes_{A_p} N''_p \to 0$$

que casi coincide con la secuencia anterior, la única diferencia es K_p. Por lo tanto, $K_p = 0$. ■

Morfismos entre variedades afines

Sean X y Y variedades afines. Entonces $X = \text{Spec}(B)$ y $Y = \text{Spec}(A)$ donde A y B son $\mathbb{C}$-álgebras finitamente generados sin nilpotentes no ceros.

Morfismos entre variedades afines

Sean X y Y variedades afines. Entonces $X = \mathrm{Spec}(B)$ y $Y = \mathrm{Spec}(A)$ donde A y B son $\mathbb{C}$-álgebras finitamente generados sin nilpotentes no ceros.

Un morfismo $\pi : X \to Y$ correspondo a un homomorfismo $\pi^* : A \to B$. Entonces, B tiene la estructura de un A-módulo:

$$a \cdot b := \pi^*(a) b \in B \quad a \in A, b \in B.$$

Morfismos entre variedades afines

Sean X y Y variedades afines. Entonces $X = \mathrm{Spec}(B)$ y $Y = \mathrm{Spec}(A)$ donde A y B son $\mathbb{C}$-álgebras finitamente generados sin nilpotentes no ceros.

Un morfismo $\pi : X \to Y$ correspondo a un homomorfismo $\pi^* : A \to B$. Entonces, B tiene la estructura de un A-módulo:

$$a \cdot b := \pi^*(a)b \in B \quad a \in A, b \in B.$$

Recuerda que $\mathrm{Spec}(B) := \{p \subset B \text{ ideal primo}\}$. Para cada $p \in X$ tenemos $\pi(p) \in Y$, es decir $\pi(p) \subset A$ es un ideal primo.

Morfismos entre variedades afines

Sean X y Y variedades afines. Entonces $X = \mathrm{Spec}(B)$ y $Y = \mathrm{Spec}(A)$ donde A y B son $\mathbb{C}$-álgebras finitamente generados sin nilpotentes no ceros.

Un morfismo $\pi : X \to Y$ correspondo a un homomorfismo $\pi^* : A \to B$. Entonces, B tiene la estructura de un A-módulo:

$$a \cdot b := \pi^*(a)b \in B \quad a \in A, b \in B.$$

Recuerda que $\mathrm{Spec}(B) := \{p \subset B \text{ ideal primo}\}$. Para cada $p \in X$ tenemos $\pi(p) \in Y$, es decir $\pi(p) \subset A$ es un ideal primo. Podemos localizar $\pi^* : A \to B$ para cada $p \in X$

$$\pi_p^* : A_{\pi(p)} \to B_p$$

lo cual hace que B_p es un $A_{\pi(p)}$-módulo.

Morfismos y familias planas

Definición

Un morfismo entre variedades afines $\pi : X = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) = Y$ es **plano en** $p \in X$ si B_p es un $A_{\pi(p)}$-módulo plano.

Un morfismo $\pi : X = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) = Y$ es **plano** si es plano en cada $p \in X$.

Morfismos y familias planas

Definición

Un morfismo entre variedades afines $\pi : X = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) = Y$ es **plano en** $p \in X$ si B_p es un $A_{\pi(p)}$-módulo plano.

Un morfismo $\pi : X = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) = Y$ es **plano** si es plano en cada $p \in X$.

Definición

Una conjunto de variedades $\{X_i : i \in I\}$ es una **familia plana** si existe un morfismo plano de variedades afines $\mathfrak{X} \to Y$ tal que

$$\{\pi^{-1}(p) : p \in Y\} = \{X_i : i \in I\}.$$

Morfismos y familias planas

Ejemplo

Para $\mu \in \mathbb{C}$ definimos la variedad afín $Y_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{C}^3$.

Afirmación: El conjunto $\{Y_\mu : \mu \in \mathbb{C}\}$ es un familia plana.

Ejemplo

Para $\mu \in \mathbb{C}$ definimos la variedad afín $Y_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{C}^3$.

Afirmación: El conjunto $\{Y_\mu : \mu \in \mathbb{C}\}$ es un familia plana.

Consideramos la variedad $Y = V(t x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_t$ y la proyección canónica $\pi : Y \to \mathbb{C}_t$ que corresponde a un homomorfismo

$$\pi^* : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, t]/(t x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) =: A$$

Ejemplo

Para $\mu \in \mathbb{C}$ definimos la variedad afín $Y_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{C}^3$.

Afirmación: El conjunto $\{Y_\mu : \mu \in \mathbb{C}\}$ es un familia plana.

Consideramos la variedad $Y = V(t x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_t$ y la proyección canónica $\pi : Y \to \mathbb{C}_t$ que corresponde a un homomorfismo

$$\pi^* : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, t]/(t x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) =: A$$

Usando la **Proposición 24.2.3** es suficiente verificar que A es un $\mathbb{C}[t]$-álgebra plana.

Ejercicio: A es una $\mathbb{C}[t]$-álgebra libre con base

$$\{x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \in A : a_0 < 4\}$$

por lo tanto usando el **Lema** A es plana.

Continuación del ejemplo

Nota que para cada $\mu \in \mathbb{C}$ el ideal $(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3)$ es homogéneo. Por lo tanto $X_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{P}^2$ es proyectiva.

Más precisamente una variedad proyectiva con un encaje en un espacio proyectivo se llama una **variedad proyectiva polarizada**.

Continuación del ejemplo

Nota que para cada $\mu \in \mathbb{C}$ el ideal $(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3)$ es homogéneo. Por lo tanto $X_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{P}^2$ es proyectiva.

Más precisamente una variedad proyectiva con un encaje en un espacio proyectivo se llama una **variedad proyectiva polarizada**.

Entonces, podemos considerar $\mathfrak{X} = V(t x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}_t$ como una **familia plana de variedades proyectivas polarizadas**.

Nota que $X_0 = V(-x_0^4 + x_1 x_2^3) \subset \mathbb{P}^2$ es una variedad tórica proyectiva. Por lo tanto $\mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ es nuestro primer ejemplo de una degeneración tórica.

Degeneraciones tóricas

Definición

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva polarizada. Una **degeneración tórica de** X es una familia plana de variedades proyectivas

$$\pi : \mathfrak{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

tal que $\pi^{-1}(t) \cong X$ para cada $t \neq 0$ y $\pi^{-1}(0) \cong X_0$ es una variedad tórica proyectiva.

Degeneraciones tóricas

Definición

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva polarizada. Una **degeneración tórica de X** es una familia plana de variedades proyectivas

$$\pi : \mathfrak{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

tal que $\pi^{-1}(t) \cong X$ para cada $t \neq 0$ y $\pi^{-1}(0) \cong X_0$ es una variedad tórica proyectiva.

- $\mathfrak{X}$ se llama la **familia**,
- $\pi^{-1}(t) \cong X, t \neq 0$ es la **fibra genérica**, y
- X_0 la **fibra especial** (a veces también se dice la **fibra central**).

También decimos que X_0 es una degeneración tórica de X.

Ejemplo degeneración tórica

Para verificar que nuestro ejemplo es una degeneración tórica solo nos falta mostrar que todas las fibras X_μ con $\mu \in \mathbb{C}^*$ son isomorfas. Es suficiente verificar que

$$X_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \cong V(x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) = X_1$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}^*$.

Ejemplo degeneración tórica

Para verificar que nuestro ejemplo es una degeneración tórica solo nos falta mostrar que todas las fibras X_μ con $\mu \in \mathbb{C}^*$ son isomorfas. Es suficiente verificar que

$$X_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \cong V(x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) = X_1$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}^*$. Sea $t \in \mathbb{C}^*$ y consideramos el automorfismo

$$\varphi_t : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$
$$x_0 \mapsto t\ x_0, \quad x_1 \mapsto t^4 x_1, \quad x_2 \mapsto x_2$$

Ejemplo degeneración tórica

Para verificar que nuestro ejemplo es una degeneración tórica solo nos falta mostrar que todas las fibras X_μ con $\mu \in \mathbb{C}^*$ son isomorfas. Es suficiente verificar que

$$X_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \cong V(x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) = X_1$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}^*$. Sea $t \in \mathbb{C}^*$ y consideramos el automorfismo

$$\varphi_t : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$
$$x_0 \mapsto t\ x_0, \quad x_1 \mapsto t^4 x_1, \quad x_2 \mapsto x_2$$

Calculamos

$$\varphi_t(x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) = t^4(t^6 x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3).$$

Con $t = \sqrt[6]{\mu}$ vemos $\varphi_t(I(X_1)) = I(X_\mu)$.

Ejemplo degeneración tórica

Para verificar que nuestro ejemplo es una degeneración tórica solo nos falta mostrar que todas las fibras X_μ con $\mu \in \mathbb{C}^*$ son isomorfas. Es suficiente verificar que

$$X_\mu = V(\mu x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) \cong V(x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) = X_1$$

para todo $\mu \in \mathbb{C}^*$. Sea $t \in \mathbb{C}^*$ y consideramos el automorfismo

$$\varphi_t : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$
$$x_0 \mapsto t\ x_0, \quad x_1 \mapsto t^4 x_1, \quad x_2 \mapsto x_2$$

Calculamos

$$\varphi_t(x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3) = t^4(t^6 x_0^2 x_1^2 - x_0^4 + x_1 x_2^3).$$

Con $t = \sqrt[6]{\mu}$ vemos $\varphi_t(I(X_1)) = I(X_\mu)$. Entonces, φ_t induce un isomorfismo

$$\varphi_t : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/I(X_1) \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/I(X_\mu)$$

por lo tanto $X_\mu \cong X_1$.

Referencias

CLS Cox, D. y Little, J. y Schenck, H. *Toric varieties.*

Eis Eisenbud, D. *Commutativa Algbera with a View Toward Algebraic Geometry*

Vak Vakil, R. *Foundations of Algebraic Geometry.* Lectures notes Math 216, Chapter 24

HH Herzog, J. y Hibi, T. *Monomial Ideals.*