Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Noviembre 22 2022

Contenido

Ejemplo: Valuaciones y matrices de pesos

Sea $R = k[tx, t^2x, (1+t^4)x]$ con $\deg(x^a f(t)) = a$ y valuación extendida $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ donde $\hat{\nu}(f(t)x^a) = (a, \deg(f(t))$.

Escogemos $\mathcal{B} = \{tx, t^2x, (1+t^4)x\}$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \pi = \pi_{\mathcal{B}} : k[y_1, y_2, y_3] & \to & k[tx, t^2x, (1+t^4)x], \\ y_1 & \mapsto & tx, \\ y_2 & \mapsto & t^2x, \\ y_3 & \mapsto & (1+t^4)x. \end{array}$$

Ejercicio 1

Calcula $\ker(\pi) =: I$ *y* $M := M_{\nu;\mathcal{B}}$. *¿Cual es el rango de* M*? ¿Es* $\mathrm{in}_M(I)$ *primo?*

Tenemos $I = (y_1^4 + y_2^4 - y_1^2 y_2 y_3)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, rango$(M) = 2 = \dim R$ y $\mathrm{in}_M(I) = (y_2^4 - y_1^2 y_2 y_3)$ no es primo.

Conos primos y casivaluaciones

Un cono $\tau \subset \mathrm{Trop}(I)$ se llama *primo* si el ideal asociado $\mathrm{in}_\tau(I)$ es primo.

Sea $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset \tau \cap \mathbb{Z}^n$ un conjunto de vectores de peso en el interior de τ y sea $M \in \mathbb{Z}^{r \times n}$ la matriz de peso cuyas filas son $u_1, \ldots, u_r$.

Proposición (Proposición 4.2, KM19)

Sea τ un cono primo y $\{u_1, \ldots, u_r\}, M$ como antes.

1. *La casivaluación ν_M es una valuación con $\mathrm{rango}(\nu_M) = \mathrm{rango}(M)$.*
2. *El asociado graduado satisface $\mathrm{gr}_M(R) \cong k[x_1, \ldots, x_n]/\,\mathrm{in}_M(I)$.*
3. *El semigrupo Γ_{ν_M} es generado de las filas de M que son $\nu_M(b_1), \ldots, \nu_M(b_n)$. Además el politopo de Newton–Okounkov $\Delta(R, \nu_M) = \mathrm{Conv}(\nu_M(b_1), \ldots, \nu_M(b_n))$.*
4. *Si $\dim \tau = d = \dim R$ y $k = \bar{k}$ entonces ν_M tiene hojas unidimensionales.*

Prueba de la Proposición 4.2

1. Tenemos $\mathrm{in}_M = \mathrm{in}_{u_r}(\dots \mathrm{in}_{u_1}(I)\dots)$ y $\mathrm{in}_{u_i}(I) = \mathrm{in}_\tau(I)$ es primo (**Lema 8.8**). Entonces, $k[x_1, \dots, x_n]/\operatorname{in}_M(I) \cong \mathrm{gr}_M(R)$ es un dominio entero por lo tanto ν_M es una valuación (**Proposición 3.6**).
2. **Lema 3.4**
3. Tenemos que los imágenes de $\mathcal{B}$ generan $\mathrm{gr}_M(R)$ por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una base de Khovanskii. Entonces, $\{\nu_M(b_1), \dots, \nu_M(b_n)\}$ generan Γ_{ν_M} (**Lema 2.10**).
4. En este caso ν_M es una valuación de rango completo y por lo tanto tiene hojas unidimensionales. ■

Alternativa Proposición 4.2

En la proposición 4.2 podemos escoger los vectores $u_1, \ldots, u_r$ alternativamente según una bandera de caras de τ:

Sea $\tau \in \mathrm{Trop}(I)$ de dimensión d, y escogemos una bandera de caras

$$\tau_1 \subset \tau_2 \subset \cdots \subset \tau_{d-1} \subset \tau$$

de τ con $\dim \tau_i = i$. Escogemos $u_1 \in \tau_1$, y para cada $2 \leq i \leq d$ tomamos $u_i \in \tau_i$ tal que $\{u_1, \ldots, u_i\} \subset \tau_i$ es linealmente independiente.
Nota que

1. $u_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{in}_{u_1}(I))$ y $u_2 \in \mathrm{Trop}(\mathrm{in}_{u_1}(I))$,
2. $u_{i-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{in}_{u_{i-1}}(\ldots \mathrm{in}_{u_1}(I)\ldots))$ y $u_i \in \mathrm{Trop}(\mathrm{in}_{u_{i-1}}(\ldots \mathrm{in}_{u_1}(I)\ldots))$ para cada $1 < i \leq d$.

Por lo tanto $M \in \mathrm{Trop}^d(I)$, más precisamente

$$\mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_\tau(I) = \mathrm{in}_{u_1+\cdots+u_d}(I).$$

Clasificación de valuaciones

Teorema (B21,KM19,BM22)

Sea R un álgebra graduada y dominio entero con $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación homogénea de rango completo con semigrupo Γ_ν finitamente generado.
Es decir, tenemos una base de Khovanskii finita $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y una presentación de R

$$R \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I, \quad b_i \mapsto x_i + I.$$

En este caso, existe un cono primo $\tau \in \mathrm{Trop}(I)$ de dimensión maximal que satisface

1. $\nu = \nu_M$ *con* $M = M_\tau \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ *una matriz de peso,*
2. $\mathrm{gr}_\nu(R) \cong k[x_1, \ldots, x_n]/\operatorname{in}_\tau(I)$,
3. $\Delta(R, \nu) \cong \mathrm{Conv}(M_1, \ldots, M_n)$ *donde* M_i *es la* $i^{\text{ésima}}$ *columna de* M.

Degeneraciones tóricas k^*-equivariante

Sea R un álgebra $\mathbb{N}$-graduada y dominio entero. Recuerda que las degeneraciones tóricas de valuaciones (y de Gröber) son definidas por un álgebra $\mathbb{N}$-graduada y dominio entero $\mathcal{R}$ que es un $k[t]$-módulo que satisface

1. $\mathcal{R}[t^{-1}] \cong R[t, t^{-1}]$ como $k[t]$-módulos;
2. $R' := \mathcal{R}/(t)$ es el álgebra de un semigrupo graduado $\Gamma \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$.

Si una degeneración tórica además satisface lo siguiente la llama *k^*-equivariante*

3. La acción de k^* en $k[t]$ se extiende a una acción en $\mathcal{R}$ que respeta la $\mathbb{N}$-graduación y la acción inducida en R' es por un morfismo de semigrupos $\Gamma \to \mathbb{Z}$.

Ejemplo: degeneración tórica k^*-equivariante

Ejercicio 2

Sean $I = (x^3 + xz^2 + y^3)$ *y* $w = (0, 2, 3)$, *entonces construimos*

$$\mathcal{R} = k[t][x, y, z]/(x^3 t^6 + xz^2 + y^3)$$

1. $\mathcal{R}$ *es bigraduado (o* $\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$*-graduado). ¿Cuales son los grados de los generadores* $t, x, y, z \in \mathcal{R}$*?*
2. *La acción estándar de* $k^* \ni a$ *en* $k[t]$ *es definida por* $a \circ t^i = a^i t^i$*. ¿Cómo se extiende a* $\mathcal{R}$*? ¿Cómo actúa* $a \in k^*$ *en* $t, x, y, z \in \mathcal{R}$*?*

1. La graduación inducida de R con grados $(0; 1, 1, 1)$ y inducida de w con grados $(1; 0, 2, 3)$.
2. Se extiende a $\mathcal{R}$ por medio de los caracteres $(1; 0, 2, 3)$ del toro k^*:

$$a \circ \bar{t}^i = a^i \bar{t}^i, a \circ \bar{x}^i = \bar{x}^i, a \circ \bar{y}^i = a^{2i} \bar{y}^i, a \circ \bar{z}^i = a^{3i} \bar{z}^i.$$

Tenemos $k[t] \hookrightarrow \mathcal{R}$ y la restricción de la acción de k^* en $\mathcal{R}$ es la acción estándar de k^* en $k[t]$.

Continuación del ejemplo: degeneración tórica k^*-equivariante

La fibra especial es

$$\mathcal{R}/(t) =: R' \cong k[x,y,z]/(xz^2+y^3) \cong k\left[\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\right]$$

y la acción inducida satisface

$$a \circ \bar{x}^i = \bar{x}^i, \quad a \circ \bar{y}^i = a^{2i}\bar{y}^i, \quad \circ \bar{z}^i = a^{3i}\bar{z}^i.$$

Nota que R' es bigraduado con grados $M = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{smallmatrix}\right)$ por lo tanto la acción es biendefinida. Además la proyección $\Gamma \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{pr} \mathbb{Z}$ induce los caracteres de la acción:

$$pr(\deg_M(\bar{x})) = 0, \quad pr(\deg_M(\bar{y})) = 2, \quad pr(\deg_M(\bar{z})) = 3.$$

La valuación asociada es justo $\nu_M : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ con semigrupo $\Gamma = \langle \binom{1}{0}, \binom{1}{2}, \binom{1}{3} \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Clasificación de degeneraciones tóricas algebraicas

Teorema (KMM22)

Para cada degeneración tórica k^*-equivariante $\mathcal{R}$ con fibra genérica R y fibra especial $R' \cong k[\Gamma]$ existe una valuación de rango completo $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ tal que $\Gamma = \Gamma_\nu$.

Ejemplo: degeneración tórica no k^*-equivariante

Sea $R = k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]/I$ donde I es el ideal generado de

$$
\begin{array}{ccc}
x_7x_9 - x_8x_0 - x_0^2 & x_3x_8 - x_1x_0 - x_7x_0 & x_1x_5 - x_3x_0 - x_7x_0 \\
x_5x_9 - x_4x_0 - x_6x_0 & x_4x_8 - x_6x_0 - x_9x_0 & x_2x_5 - x_4x_3 - x_0^2 \\
x_3x_9 - x_2x_0 - x_0^2 & x_2x_8 - x_1x_9 - x_0^2 & x_1x_4 - x_2x_0 - x_0^2 \\
x_5x_8 - x_7x_6 - x_0^2 & x_3x_6 - x_5x_0 - x_0^2 & x_2x_6 - x_4x_0 - x_9x_0 \\
x_1x_6 - x_8x_0 - x_0^2 & x_4x_7 - x_5x_0 - x_0^2 & x_2x_7 - x_1x_0 - x_3x_0
\end{array}
$$

Existe una degeneración tórica de $V(I)$ a la variedad tórica definido por el politopo P que es la envolvente convexa de las columnas de la matriz

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Ejemplo: degeneración tórica no k^*-equivariante

Se puede verificar que la degeneración tórica es definido por el siguiente $k[t_1, t_2, t_3]$-módulo libre que es $\mathcal{R} = k[t_1, t_2, t_3][x_0, \ldots, x_9]/\mathcal{I}$ donde $\mathcal{I}$ es generado por

$$\begin{array}{ccc}
x_7x_9 - x_8x_0 - x_0^2t_2 & x_3x_8 - x_1x_0 - x_7x_0t_3 & x_1x_5 - x_3x_0t_1t_2 - x_7x_0 \\
x_5x_9 - x_4x_0t_2 - x_6x_0 & x_4x_8 - x_6x_0 - x_9x_0t_3 & x_2x_5 - x_4x_3t_2 - x_0^2 \\
x_3x_9 - x_2x_0 - x_0^2t_3 & x_2x_8 - x_1x_9 - x_0^2t_2t_3 & x_1x_4 - x_2x_0t_1 - x_0^2 \\
x_5x_8 - x_7x_6 - x_0^2t_2 & x_3x_6 - x_5x_0t_3 - x_0^2 & x_2x_6 - x_4x_0t_2t_3 - x_9x_0 \\
x_1x_6 - x_8x_0 - x_0^2t_2 & x_4x_7 - x_5x_0 - x_0^2t_1 & x_2x_7 - x_1x_0 - x_3x_0t_2
\end{array}$$

Asignando los multipesos $(0, -1, 0), (-1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$ a t_1, t_2 y t_3 vemos que $\mathcal{I}$ es homogéneo.

Pero el politopo P no es el politopo de Newton–Okounkov de una valuación:

$$\overset{(0,-1,0)}{x_4x_7} - \overset{(0,-1,0)}{x_5x_0} - \overset{(0,0,0)}{x_0^2} \quad \Rightarrow \quad (0, -1, 0) > (0, 0, 0)$$

Ejemplo: degeneración tórica, pero no k^*-equivariante

¿Dónde falla el Teorema de Kaveh–Manon–Murata?

No tenemos una acción de k^*: la acción que se extiende de $k[t_1, t_2, t_3]$ a $\mathcal{R}$ es definida por los pesos de t_1, t_2, t_3 que son $(0, -1, 0), (-1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

Pero la latíz generada por estos pesos es solo de rango 2, por lo tanto tenemos una acción de $(k^*)^2$ como el toro cuya latíz de caracteres $L \subset \mathbb{Z}^3$ es generado por $(0, -1, 0), (-1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

Nota: L no intersecta $\mathbb{N}^3$ por lo tanto no existe ninguna proyección a k^* que hace que la familia es k^*-equivariante.

Referencias

- Kiumars Kaveh, Christopher Manon. Khovanskii bases, higher rank valuations, and tropical geometry. SIAM J. Appl. Algebra Geom. 3 (2019), no. 2, 292–336. *arXiv:1610.00298 [math.AG]*
- Kiumars Kaveh, Christopher Manon, Takuya Murata. On degenerations of projective varieties to complexity-one T-varieties. *arXiv:1708.02698 [math.AG]*
- Lara Bossinger. Full-rank Valuations and Toric Initial Ideals. Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, no. 10, 7433–7469. *arXiv:1903.11068 [math.AG]*
- Lara Bossinger, Takuya Murata. A map to a toric variety and a toric degeneration. *arXiv:2210.13137 [math.AG]*