Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Noviembre 29 2022

Contenido

1. Duffing Equation
2. Harmonic Balancing: a polynomial system
3. Change to a linear system (subalgebra of a polynomial ring)
4. Initial algebra
5. Khovanskii basis result
6. Homotopy continuation

Duffing Equation

La ecuación diferencial ordinaria que describe el comportamiente de un oscilador es la *ecuación de Duffing*

$$X'' + \alpha X + \beta X^3 - \gamma \cos(\omega t) + \delta X' = 0 \tag{0.1}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ω son parámetros y $t \mapsto X(t)$ es una función real.

Dependiendo de los parámetros hay soluciones caóticas y no-caóticas con solución periódica en estado estacionario de forma

$$X(t) = X(t + 2\pi k), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Duffing Equation

La ecuación diferencial ordinaria que describe el comportamiente de un oscilador es la *ecuación de Duffing*

$$X'' + \alpha X + \beta X^3 - \gamma \cos(\omega t) + \delta X' = 0 \tag{0.1}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ω son parámetros y $t \mapsto X(t)$ es una función real.

Dependiendo de los parámetros hay soluciones caóticas y no-caóticas con solución periódica en estado estacionario de forma

$$X(t) = X(t + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Hay una versión más general de N osciladores acoplados, pero para la exposición tratamos el caso $N = 1$ (el caso general se resuelve con los mismos métodos)

Harmonic Balancing: a polynomial system

Con el siguiente Ansatz

$$X(t) = u\sin(t) + v\cos(t)$$

evaluamos la ecuación (0.1)

Harmonic Balancing: a polynomial system

Con el siguiente Ansatz

$$X(t) = u\sin(t) + v\cos(t)$$

evaluamos la ecuación (0.1) y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = F(u,v,t) \quad = \quad & -\gamma\cos(\omega t) + \beta\cos(t)^3 v(v^2 - 3u^2) \\ & -\beta\sin(t)\cos(t)^2 u(u^2 - 3v^2) \\ & +\cos(t)(3\beta u^2 v + \delta u + v(\alpha - 1)) \\ & +\sin(t)(\beta u^3 + (\alpha - 1)u - \delta v) \end{aligned}$$

Harmonic Balancing: a polynomial system

Expansión de Fourier permite escribir

$$F(u, v, t) = f(u, v)\cos(t) + g(u, v)\sin(t)$$

donde f, g son coeficientes de Fourier que se calculan multiplicando F por cos resp. sin y integrando t.

Harmonic Balancing: a polynomial system

Expansión de Fourier permite escribir

$$F(u,v,t) = f(u,v)\cos(t) + g(u,v)\sin(t)$$

donde f, g son coeficientes de Fourier que se calculan multiplicando F por cos resp. sin y integrando t.Se obtiene

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{3}{4}\beta u(u^2+v^2) + (\alpha-1)u - \delta v, \\ g(u,v) &= \frac{8\gamma\sin(\pi\omega)\omega + 3\pi(\omega^2-1)(\beta v(v^2+u^2) + (\alpha-1)\frac{4\alpha v}{3} + \frac{4\delta u}{3})}{(4\omega^2-4)\pi} \end{aligned}$$

Harmonic Balancing: a polynomial system

Expansión de Fourier permite escribir

$$F(u,v,t) = f(u,v)\cos(t) + g(u,v)\sin(t)$$

donde f, g son coeficientes de Fourier que se calculan multiplicando F por cos resp. sin y integrando t.Se obtiene

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{3}{4}\beta u(u^2+v^2) + (\alpha-1)u - \delta v, \\ g(u,v) &= \frac{8\gamma\sin(\pi\omega)\omega + 3\pi(\omega^2-1)(\beta v(v^2+u^2) + (\alpha-1)\frac{4\alpha v}{3} + \frac{4\delta u}{3})}{(4\omega^2-4)\pi} \end{aligned}$$

Renombrando las coordinadas se convierte en

$$\begin{aligned} f(u,v) &= a_1 u(u^2+v^2) + a_2 u + a_3 v + a_4, && (0.2) \\ g(u,v) &= b_1 v(u^2+v^2) + b_2 u + b_3 v + b_4 && (0.3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (0.1) con el Ansatz se convierte en $f(u,v) = g(u,v) = 0$.

A linear system (subalgebra of a polynomial ring)

Idea general: una ecuación de forma $\sum_{j=1}^{m} c_j h_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ tiene un número fijo de soluciones para casi todas $c_i \in \mathbb{C}$; el objetivo es calcular este número.

A linear system (subalgebra of a polynomial ring)

Idea general: una ecuación de forma $\sum_{j=1}^{m} c_j h_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ tiene un número fijo de soluciones para casi todas $c_i \in \mathbb{C}$; el objetivo es calcular este número.

Definimos $\phi : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [h_1(x) : \cdots : h_m(x)]$ que mando la hipersuperficie $\{F = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ al hiperplano $\{\sum_{j=1}^{m} c_j y_j = 0\} \subset \mathbb{P}^{m-1}$.

$\Rightarrow$ el grado de $X := \overline{\phi(\mathbb{C}^n)} \subset \mathbb{P}^{m-1}$ es una cuota mayor para el número que buscamos.

A linear system (subalgebra of a polynomial ring)

Nuestro caso: $f(u,v)$ y $g(u,v)$ son combinaciones lineales de los polinomios $u(u^2+v^2), v(u^2+v^2), u, v, 1$. Por lo tanto

$$\phi : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4, \quad (u,v) \mapsto [u(u^2+v^2) : v(u^2+v^2) : u : v : 1].$$

A linear system (subalgebra of a polynomial ring)

Nuestro caso: $f(u,v)$ y $g(u,v)$ son combinaciones lineales de los polinomios $u(u^2+v^2), v(u^2+v^2), u, v, 1$. Por lo tanto

$$\phi : \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4, \quad (u,v) \mapsto [u(u^2+v^2) : v(u^2+v^2) : u : v : 1].$$

Sean $y_1, \ldots, y_5$ las coordenadas de $\mathbb{P}^4$. Entonces, la cerradura de Zariski del imagen es

$$X = \{y \in \mathbb{P}^4 : y_2y_3 - y_1y_4 = y_3^2y_4 + y_4^3 - y_2y_5^2 = y_3^3 + y_3y_4^2 - y_1y_5^2 = 0\}$$

Se puede verificar en Macaulay2 que X es de grado 5.

Hilbert function

Para calcular el grado de $X = \overline{\phi(\mathbb{C}^n)}$ consideramos el álgebra

$$S_\phi = \mathbb{C}[sh_1, \dots, sh_m] \subset \mathbb{C}[s, x_1, \dots, x_n]$$

con graduación $\deg(s) = 1, \deg(x_i) = 0$. El grado de X es $\dim(X)!$ multiplicado por el coeficiente principal del polinomio de Hilbert P_ϕ de S_ϕ.

Hilbert function

Para calcular el grado de $X = \overline{\phi(\mathbb{C}^n)}$ consideramos el álgebra

$$S_\phi = \mathbb{C}[sh_1, \dots, sh_m] \subset \mathbb{C}[s, x_1, \dots, x_n]$$

con graduación $\deg(s) = 1, \deg(x_i) = 0$. El grado de X es $\dim(X)!$ multiplicado por el coeficiente principal del polinomio de Hilbert P_ϕ de S_ϕ.

Ejemplo: $S_\phi = \mathbb{C}[su(u^2+v^2), sv(u^2+v^2), su, sv, s] \subset \mathbb{C}[s, u, v]$. Calcula la dimensión de $(S_\phi)_0, (S_\phi)_1, (S_\phi)_2$.

Hilbert function

Para calcular el grado de $X = \overline{\phi(\mathbb{C}^n)}$ consideramos el álgebra

$$S_\phi = \mathbb{C}[sh_1, \ldots, sh_m] \subset \mathbb{C}[s, x_1, \ldots, x_n]$$

con graduación $\deg(s) = 1, \deg(x_i) = 0$. El grado de X es $\dim(X)!$ multiplicado por el coeficiente principal del polinomio de Hilbert P_ϕ de S_ϕ.

Ejemplo: $S_\phi = \mathbb{C}[su(u^2+v^2), sv(u^2+v^2), su, sv, s] \subset \mathbb{C}[s, u, v]$. Calcula la dimensión de $(S_\phi)_0, (S_\phi)_1, (S_\phi)_2$.

El polinomio de Hilbert es $P_\phi(\ell) = (5/2)\ell^2 + (3/2)\ell + 1$, entonces $\deg(P_\phi) = 2 = \dim X$ y $(5/2)2! = 5 = \deg(X)$.

Initial algebra and Khovanskii basis

Podemos calcular la función de Hilbert de una *degeneración tórica*. Por ejemplo, fijando el orden monomial $\prec$ en $\mathbb{C}[s, x_1, \ldots, x_n]$ el mapeo $\nu_\prec : S_\phi \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^{n+1}$ con $h \mapsto \mathrm{supp}(\mathrm{in}_\prec(h))$ el asociado graduado es

$$(S_\phi)_{\mathrm{in}} := \mathbb{C}[\mathrm{in}_\prec(h) : h \in S_\phi].$$

Initial algebra and Khovanskii basis

Podemos calcular la función de Hilbert de una *degeneración tórica*. Por ejemplo, fijando el orden monomial $\prec$ en $\mathbb{C}[s, x_1, \ldots, x_n]$ el mapeo $\nu_\prec : S_\phi \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^{n+1}$ con $h \mapsto \mathrm{supp}(\mathrm{in}_\prec(h))$ el asociado graduado es

$$(S_\phi)_{\mathrm{in}} := \mathbb{C}[\mathrm{in}_\prec(h) : h \in S_\phi].$$

Si $sh_1, \ldots, sh_n$ son una *base de Khovanskii*, entonces $(S_\phi)_{\mathrm{in}} = \mathbb{C}[\mathrm{in}_\prec(sh_1), \ldots, \mathrm{in}_\prec(sh_n)]$.

Initial algebra and Khovanskii basis

Podemos calcular la función de Hilbert de una *degeneración tórica*. Por ejemplo, fijando el orden monomial $\prec$ en $\mathbb{C}[s, x_1, \ldots, x_n]$ el mapeo $\nu_\prec : S_\phi \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^{n+1}$ con $h \mapsto \mathrm{supp}(\mathrm{in}_\prec(h))$ el asociado graduado es

$$(S_\phi)_{\mathrm{in}} := \mathbb{C}[\mathrm{in}_\prec(h) : h \in S_\phi].$$

Si $sh_1, \ldots, sh_n$ son una *base de Khovanskii*, entonces $(S_\phi)_{\mathrm{in}} = \mathbb{C}[\mathrm{in}_\prec(sh_1), \ldots, \mathrm{in}_\prec(sh_n)]$.

Ejemplo: Para $S_\phi = \mathbb{C}[su(u^2+v^2), sv(u^2+v^2), su, sv, s] \subset \mathbb{C}[s,u,v]$ y $\prec = <_{lex}$ calcula el asociado graduado.

Politopo de Newton–Okounkov y el grado

Teorema [KK] Si $sh_1, \ldots, sh_n$ es una base de Khovanskii de la valuación $\nu_\prec$ entonces el politopo de Newton–Okounkov es

$$Q := \operatorname{Conv}\left(\alpha_i \in \mathbb{Z}^n : \nu_\prec(sh_i) = (1, \alpha_i), i = 1, \ldots, n\right) \subset \mathbb{R}^n$$

Si $\dim Q = n$, entonces $\deg(X) = \dim(X)!\mathrm{Vol}(Q)$.

Politopo de Newton–Okounkov y el grado

Teorema [KK] Si $sh_1, \ldots, sh_n$ es una base de Khovanskii de la valuación $\nu_\prec$ entonces el politopo de Newton–Okounkov es

$$Q := \mathrm{Conv}\left(\alpha_i \in \mathbb{Z}^n : \nu_\prec(sh_i) = (1, \alpha_i), i = 1, \ldots, n\right) \subset \mathbb{R}^n$$

Si $\dim Q = n$, entonces $\deg(X) = \dim(X)!\mathrm{Vol}(Q)$.

Ejemplo: Calcula el politopo Q y su volumen en el ejemplo $S_\phi = \mathbb{C}[su(u^2+v^2), sv(u^2+v^2), su, sv, s] \subset \mathbb{C}[s,u,v]$ y $\prec = <_{lex}$.

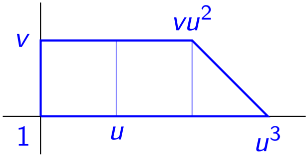
Politopo de Newton–Okounkov y el grado

Teorema [KK] Si $sh_1, \ldots, sh_n$ es una base de Khovanskii de la valuación $\nu_\prec$ entonces el politopo de Newton–Okounkov es

$$Q := \mathrm{Conv}\,(\alpha_i \in \mathbb{Z}^n : \nu_\prec(sh_i) = (1, \alpha_i), i = 1, \ldots, n) \subset \mathbb{R}^n$$

Si $\dim Q = n$, entonces $\deg(X) = \dim(X)!\mathrm{Vol}(Q)$.

Ejemplo: Calcula el politopo Q y su volumen en el ejemplo $S_\phi = \mathbb{C}[su(u^2+v^2), sv(u^2+v^2), su, sv, s] \subset \mathbb{C}[s,u,v]$ y $\prec = <_{lex}$.



Osciladores de Duffing acoplados

Teorema [BM^{2}T] El sistema de N osciladores de Duffing acoplados con parametros generales complejos tiene 5^N soluciones complejas.
Además existen parametros reales tales que el sistema tiene 5^N soluciones reales. Es decir, la cuota es óptima.

Osciladores de Duffing acoplados

Teorema [BM^{2}T] El sistema de N osciladores de Duffing acoplados con parametros generales complejos tiene 5^N soluciones complejas. Además existen parametros reales tales que el sistema tiene 5^N soluciones reales. Es decir, la cuota es óptima.

Los autores de [BM^{2}T] aplican el teorema a la construcción de una homotopía continua para calcular las soluciones del sistema.

Homotopy continuation

Continuación numérica de homotopía es un método para resolver sistemas de polinomios $F(x) = 0$. Una *homotopía* es

- una familia de un parametro $H(x; t), t \in \mathbb{C}_t$ que define una curva en $\mathbb{C}^n_x \times \mathbb{C}_t$,

Homotopy continuation

Continuación numérica de homotopía es un método para resolver sistemas de polinomios $F(x) = 0$. Una *homotopía* es

- una familia de un parametro $H(x; t), t \in \mathbb{C}_t$ que define una curva en $\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_t$, tal que
- el *sistema inicial* $G(x) := H(x; 0)$ tiene soluciones conocidas,

Homotopy continuation

Continuación numérica de homotopía es un método para resolver sistemas de polinomios $F(x) = 0$. Una *homotopía* es

- una familia de un parametro $H(x;t), t \in \mathbb{C}_t$ que define una curva en $\mathbb{C}^n_x \times \mathbb{C}_t$, tal que
- el *sistema inicial* $G(x) := H(x;0)$ tiene soluciones conocidas, y
- las soluciones del *sistema destino* $F(x)$ se encuentran entre las de $H(x;1)$

Homotopy continuation

Continuación numérica de homotopía es un método para resolver sistemas de polinomios $F(x) = 0$. Una *homotopía* es

- una familia de un parametro $H(x; t), t \in \mathbb{C}_t$ que define una curva en $\mathbb{C}_x^n \times \mathbb{C}_t$, tal que
- el *sistema inicial* $G(x) := H(x; 0)$ tiene soluciones conocidas, y
- las soluciones del *sistema destino* $F(x)$ se encuentran entre las de $H(x; 1)$

La homotopía es *óptima* si cada solución del sistema inicial se deforma a una solución distinta del sistema destino.

Homotopy from toric degenerations

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión d y $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}_t$ una degeneración tórica de X con fibra especial $\mathcal{X}_0$ y fibra genérica $\mathcal{X}_1 \cong X$.

Homotopy from toric degenerations

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión d y $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}_t$ una degeneración tórica de X con fibra especial $\mathcal{X}_0$ y fibra genérica $\mathcal{X}_1 \cong X$.

Toma un espacio lineal general $L \subset \mathbb{P}^n$ de codimensión d que intersecta transversalmente $\mathcal{X}_0$ y $\mathcal{X}_1$ ($\mathcal{X}_0 \cap L$ y $\mathcal{X}_1 \cap L$ son secciones lineales).

Homotopy from toric degenerations

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión d y $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}_t$ una degeneración tórica de X con fibra especial $\mathcal{X}_0$ y fibra genérica $\mathcal{X}_1 \cong X$.

Toma un espacio lineal general $L \subset \mathbb{P}^n$ de codimensión d que intersecta transversalmente $\mathcal{X}_0$ y $\mathcal{X}_1$ ($\mathcal{X}_0 \cap L$ y $\mathcal{X}_1 \cap L$ son secciones lineales).

Sea $H(x; t)$ un conjunto de

1. un número finito de polinomios que definen $\mathcal{X}$ y
2. d formas lineales que determinan L.

Homotopy from toric degenerations

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión d y $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}_t$ una degeneración tórica de X con fibra especial $\mathcal{X}_0$ y fibra genérica $\mathcal{X}_1 \cong X$.

Toma un espacio lineal general $L \subset \mathbb{P}^n$ de codimensión d que intersecta transversalmente $\mathcal{X}_0$ y $\mathcal{X}_1$ ($\mathcal{X}_0 \cap L$ y $\mathcal{X}_1 \cap L$ son secciones lineales).

Sea $H(x;t)$ un conjunto de

1. un número finito de polinomios que definen $\mathcal{X}$ y
2. d formas lineales que determinan L.

$H(x;t)$ se llama una *homotopía de sección lineal*.

Proposición [BFW] Una homotopía de sección lineal es óptima.

Toric two-step homotopy algorithm

Algoritmo

Input: Una degeneración tórica $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}_t$ con $\mathcal{X}_0$ definido por un ideal tórico y un espacio lineal $L \subset \mathbb{P}^n$ con $\dim \mathcal{X}_1 = \mathrm{codim} L$.
Output: Todos los puntos de $\mathcal{X}_1 \cap L$.

[1] Es una homotopía óptima para resolver sistemas tóricos.

Toric two-step homotopy algorithm

Algoritmo

Input: Una degeneración tórica $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}_t$ con $\mathcal{X}_0$ definido por un ideal tórico y un espacio lineal $L \subset \mathbb{P}^n$ con $\dim \mathcal{X}_1 = \operatorname{codim} L$.
Output: Todos los puntos de $\mathcal{X}_1 \cap L$.

Do:

1. Calcula el sistema de polinomios $G(x) = 0$ que determina $L \cap \mathcal{X}_0$;
2. Utiliza homotopía poliedral[1] para resolver $G(x) = 0$ y obtiene los puntos de $L \cap \mathcal{X}_0$;
3. Utiliza la homotopía de sección lineal para determinar los puntos de $\mathcal{X}_1 \cap L$.

[1] Es una homotopía óptima para resolver sistemas tóricos.

Toric two-step homotopy algorithm

Algoritmo

Input: Una degeneración tórica $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}_t$ con $\mathcal{X}_0$ definido por un ideal tórico y un espacio lineal $L \subset \mathbb{P}^n$ con $\dim \mathcal{X}_1 = \mathrm{codim} L$.
Output: Todos los puntos de $\mathcal{X}_1 \cap L$.

Do:

1. Calcula el sistema de polinomios $G(x) = 0$ que determina $L \cap \mathcal{X}_0$;
2. Utiliza homotopía poliedral[1] para resolver $G(x) = 0$ y obtiene los puntos de $L \cap \mathcal{X}_0$;
3. Utiliza la homotopía de sección lineal para determinar los puntos de $\mathcal{X}_1 \cap L$.

Teorema [BFW] El algoritmo es una homotopía óptima para $\mathcal{X}_1 \cap L$.

[1] Es una homotopía óptima para resolver sistemas tóricos.

Más aplicaciones

- Determining the equations defining the Hirota variety (moduli of soliton solutions to the KP equation) [Agostini-Fevola-Mandelstham-Sturmfels]
- Proving the positive Laurent phenomenon for cluster algebras [Gross-Hacking-Keel-Kontsevich]
- Naturality of Schubert polynomials [Knutson-Miller]
- Gromov width of coadjoint orbits of all compact connected simple Lie groups [Fang-Littelmann-Pabiniak]
- Computing the symbol alphabet and adjacencies among letters for amplitude bootstrap in $\mathcal{N} = 4$ Super-Yang-Mills [B.-Drummond-Glew]

Referencias

BM^{2}T Paul Breiding, Mateusz Michalek, Leonid Monin, y Simon Telend. The Algebraic Degree of Coupled Oscillators. *arXiv:2208.08179 [math.AG]*

KK Kiumars Kaveh and Askold G Khovanskii. Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory. *Annals of Mathematics* (2012), pp. 925-978.

BFW Michael Burr, Frank Sottile, y Elise Walker. Numerical homotopies from Khovanskii bases. *arXiv:2008.13055 [math.AG]*