Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Noviembre 8 2022

Contenido

Base de Khovanskii

Sea R un álgebra graduada de dimensión d y $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{r-1}$ una valuación de rango $r \leq d$.

Un conjunto $\mathcal{B} \subset R$ es una **base de Khovanskii** para $(R, \hat{\nu})$ si el imagen de $\mathcal{B}$ en $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ es un conjunto de generadores del álgebra.

Base de Khovanskii

Sea R un álgebra graduada de dimensión d y $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{r-1}$ una valuación de rango $r \leq d$.

Un conjunto $\mathcal{B} \subset R$ es una **base de Khovanskii** para $(R, \hat{\nu})$ si el imagen de $\mathcal{B}$ en $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ es un conjunto de generadores del álgebra.

Tarea 1 (Lema 2.10, KM19)

Sea $\mathcal{B}$ una base de Khovanskii para $(R, \hat{\nu})$. Entonces $\{\hat{\nu}(b) : b \in \mathcal{B}\}$ es un conjunto de generadores del semigrupo $\Gamma_{\hat{\nu}}$.

Ejercicio: Base de Khovanskii

Ejercicio 1

Sea $R = k[w, t^3w, (t - t^3)w] \subset k[w, t]$ *con* $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^2, <_{lex})$ *definido por*

$$f(t)w^a \mapsto (a, \deg(f(t))).$$

Calcula una base de Khovanskii.

Algoritmo de subducción

Recuerda la proyección $R \to \mathrm{gr}_\nu R, \quad f \mapsto \bar{f} \in R_{\leq \hat{\nu}(f)}/R_{<\hat{\nu}(f)}$.

Input: Una base de Khovanskii $\mathcal{B}$ de $(R, \hat{\nu})$ y $f \in R \setminus \{0\}$;
Output: una expresión polinomial de f en terminos de un número finito de elementos de $\mathcal{B}$;

Algoritmo de subducción

Recuerda la proyección $R \to \mathrm{gr}_\nu R, \quad f \mapsto \bar{f} \in R_{\leq \hat{\nu}(f)}/R_{<\hat{\nu}(f)}$.

Input: Una base de Khovanskii $\mathcal{B}$ de $(R, \hat{\nu})$ y $f \in R \setminus \{0\}$;
Output: una expresión polinomial de f en terminos de un número finito de elementos de $\mathcal{B}$;

El imagen de $\mathcal{B}$ genera $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ entonces existe un polinomio $p(x_1, \ldots, x_n)$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$ tal que $\bar{f} = p(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$;

si $f = p(b_1, \ldots, b_n)$ **output:** $p(b_1, \ldots, b_n)$;

si no $f \longleftarrow f - p(b_1, \ldots, b_n)$ y **repite**;

Algoritmo de subducción

Nota que $\hat{\nu}(f - p(b_1, \ldots, b_n)) < \hat{\nu}(f)$ y recureda que $\dim(R_{<\hat{\nu}(f)}) < \infty$ y $|\Gamma_{<\hat{\nu}(f)}| < \infty$. Entonces, el algoritmo termina si y solo si cada componente $\Gamma_{<\hat{\nu}(f)}$ tiene un mínimo. En otras palabras:

Algoritmo de subducción

Nota que $\hat{\nu}(f - p(b_1, \ldots, b_n)) < \hat{\nu}(f)$ y recureda que $\dim(R_{<\hat{\nu}(f)}) < \infty$ y $|\Gamma_{<\hat{\nu}(f)}| < \infty$. Entonces, el algoritmo termina si y solo si cada componente $\Gamma_{<\hat{\nu}(f)}$ tiene un mínimo. En otras palabras:

Proposición (Proposición 2.13, KM19)

Supongamos que el semigrupo $\Gamma_{\hat{\nu}}$ es mínimo-bien-ordenado, es decir cada subconjunto tiene un mínimo con respecto al orden total en $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^r$. En este caso el algoritmo de subducción termina.

Valuación e ideal inicial

Sea $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ un conjunto de generadores de R. Consideramos

$$\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R, \quad x_i \mapsto b_i,$$
$$\pi_\nu : k[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{gr}_\nu R, \quad x_i \mapsto \bar{b}_i.$$

Valuación e ideal inicial

Sea $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ un conjunto de generadores de R. Consideramos

$$\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R, \quad x_i \mapsto b_i,$$
$$\pi_\nu : k[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{gr}_\nu R, \quad x_i \mapsto \bar{b}_i.$$

Sean $I = \ker \pi$ y $I_{\hat{\nu}} = \ker \pi_{\hat{\nu}}$. Si $\hat{\nu}$ tiene *hojas unidimensionales* el ideal $I_{\hat{\nu}}$ es *tórico* pues

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I_{\hat{\nu}} \cong k[\langle \hat{\nu}(b_1), \ldots, \hat{\nu}(b_n)\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}]$$

Valuación e ideal inicial

Sea $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ un conjunto de generadores de R. Consideramos

$$\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R, \quad x_i \mapsto b_i,$$
$$\pi_\nu : k[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{gr}_\nu R, \quad x_i \mapsto \bar{b}_i.$$

Sean $I = \ker \pi$ y $I_{\hat{\nu}} = \ker \pi_{\hat{\nu}}$. Si $\hat{\nu}$ tiene *hojas unidimensionales* el ideal $I_{\hat{\nu}}$ es *tórico* pues

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I_{\hat{\nu}} \cong k[\langle \hat{\nu}(b_1), \ldots, \hat{\nu}(b_n)\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}]$$

Si $\mathcal{B}$ además es una base de Khovanskii para $(R, \hat{\nu})$ tenemos

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I_\nu \cong k[\langle \hat{\nu}(b_1), \ldots, \hat{\nu}(b_n)\rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}] \cong k[\Gamma_{\hat{\nu}}] \cong \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$$

Valuación e ideal inicial

Sea $M \in \mathbb{Z}^{r \times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\hat{\nu}(b_1), \ldots, \hat{\nu}(b_n)$.

Lema (Lema 2.16, KM19)

El ideal inicial de I con respecto a la matriz de pesos M cumple

$$\mathrm{in}_M(I) \subset I_{\hat{\nu}}.$$

En particular, si $\hat{\nu}$ tiene hojas unidimensionales tenemos $M \in \mathrm{Trop}^r(I)$.

Valuación e ideal inicial

Sea $M \in \mathbb{Z}^{r\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\hat{\nu}(b_1), \dots, \hat{\nu}(b_n)$.

Lema (Lema 2.16, KM19)

El ideal inicial de I con respecto a la matriz de pesos M cumple

$$\mathrm{in}_M(I) \subset I_{\hat{\nu}}.$$

En particular, si $\hat{\nu}$ tiene hojas unidimensionales tenemos $M \in \mathrm{Trop}^r(I)$.

Prueba: Sea $p = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha \in I$. Entonces, por definición $p(b_1, \dots, b_n) = 0$. El multipeso de un monomio $c_\alpha x^\alpha$ con respecto a M es

$$M\alpha = \deg_M(c_\alpha x^\alpha) = \hat{\nu}(c_\alpha b_1^{\alpha_1} \cdots b_n^{\alpha_n})$$

con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Valuación e ideal inicial

Sea $M \in \mathbb{Z}^{r\times n}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\hat{\nu}(b_1), \dots, \hat{\nu}(b_n)$.

Lema (Lema 2.16, KM19)

El ideal inicial de I con respecto a la matriz de pesos M cumple

$$\mathrm{in}_M(I) \subset I_{\hat{\nu}}.$$

En particular, si $\hat{\nu}$ tiene hojas unidimensionales tenemos $M \in \mathrm{Trop}^r(I)$.

Prueba: Sea $p = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha \in I$. Entonces, por definición $p(b_1, \dots, b_n) = 0$. El multipeso de un monomio $c_\alpha x^\alpha$ con respecto a M es

$$M\alpha = \deg_M(c_\alpha x^\alpha) = \hat{\nu}(c_\alpha b_1^{\alpha_1} \cdots b_n^{\alpha_n})$$

con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.Nota que $\deg_M(p)$ es el peso de cada monomio en $\mathrm{in}_M(p)$ entonces

$$\hat{\nu}(\mathrm{in}_M(p)(b_1, \dots, b_n)) < \deg_M(p)$$

Pues $\mathrm{in}_M(p)(b_1, \dots, b_n) = 0$ en $R_{\leq \deg_M(p)}/R_{<\deg_M(p)}$ y $\mathrm{in}_M(p) \in I_{\hat{\nu}}$. ■

Criterios para bases de Khovanskii

Teorema (Teorema 2.17, KM19)

Sea $\mathcal{B}$ un conjunto de generadores de R. Entonces,

$$\mathcal{B} \text{ es una base de Khovanskii para } (R, \hat{\nu}) \quad \text{si y solo si} \quad \mathrm{in}_M(I) = I_{\hat{\nu}}.$$

Criterios para bases de Khovanskii

Teorema (Teorema 2.17, KM19)

Sea $\mathcal{B}$ un conjunto de generadores de R. Entonces,

$$\mathcal{B} \text{ es una base de Khovanskii para } (R, \hat{\nu}) \quad \text{si y solo si} \quad \mathrm{in}_M(I) = I_{\hat{\nu}}.$$

Teorema (Teorema 1, B21)

Sea $\mathcal{B}$ un conjunto de generadores de R y $\hat{\nu}$ una valuación de rango completo con hojas unidimenionales. Entonces,

$$\mathcal{B} \text{ es base de Khovanskii para } (R, \hat{\nu}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{rango}(M) = d \text{ y } \mathrm{in}_M(I) \text{ primo.}$$

Casi-valuaciones

Recuerda, nuestras valuaciones *homogéneas* $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^r, <)$ satisfacen para $f, g \in R \setminus \{0\}$ y $c \in k$

1. $\hat{\nu}(fg) = \hat{\nu}(f) + \hat{\nu}(g)$;
2. si $f + g \neq 0$ tenemos $\hat{\nu}(f + g) \leq \max_{<}\{\hat{\nu}(f), \hat{\nu}(g)\}$;
3. $\hat{\nu}(cf) = \hat{\nu}(f)$.

Casi-valuaciones

Recuerda, nuestras valuaciones *homogéneas* $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^r, <)$ satisfacen para $f, g \in R \setminus \{0\}$ y $c \in k$

1. $\hat{\nu}(fg) = \hat{\nu}(f) + \hat{\nu}(g)$;
2. si $f + g \neq 0$ tenemos $\hat{\nu}(f + g) \leq \max_<\{\hat{\nu}(f), \hat{\nu}(g)\}$;
3. $\hat{\nu}(cf) = \hat{\nu}(f)$.

Si en cambio de **(1)** satisface

$$\textbf{(1')} \quad \hat{\nu}(fg) \leq \hat{\nu}(f) + \hat{\nu}(g)$$

la aplicación $\hat{\nu}$ se llama una *casivaluación*. Como en el caso de valuaciones podemos definir una filtración $F_{\leq a} = \{f \in R \setminus \{0\} : \hat{\nu}(f) \leq a\} \cup \{0\}$ asociado a una casivaluación.

Casi-valuaciones desde matrices de peso

Sea $M \in \mathbb{Z}^{r\times n}$ una matriz de pesos. Definimos una casivaluación asociada $\tilde{\nu}_M : k[x_1, \ldots, _n] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^r$ como sigue. Sea $p = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$ entonces

$$\tilde{\nu}_M(p) := \max{}_{<_{lex}}\{M\alpha : c_\alpha \neq 0\}.$$

Casi-valuaciones desde matrices de peso

Sea $M \in \mathbb{Z}^{r\times n}$ una matriz de pesos. Definimos una casivaluación asociada $\tilde{\nu}_M : k[x_1,\dots,_n] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^r$ como sigue. Sea $p = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$ entonces

$$\tilde{\nu}_M(p) := \max{}_{<_{lex}}\{M\alpha : c_\alpha \neq 0\}.$$

Tarea 2

Verifica que $\tilde{\nu}_M : k[x_1,\dots,x_n] \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^r, <_{lex})$ *es una valuación para cada* $M \in \mathbb{Z}^{r\times n}$*. Recuerda que* $\mathrm{in}_M(f) = \mathrm{in}_{u_r}(\dots \mathrm{in}_{u_1}(f)\dots)$ *para* $u_1,\dots,u_r$ *las filas de* M*.*

Casi-valuaciones desde matrices de peso

Sea $\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R$ la proyección tal que $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I \cong R$. Entonces obtenemos un diagrama de pushforward

$$\begin{tikzcd}
k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\} \arrow[rr, "\tilde{\nu}_M"] \arrow[d, "\pi"'] & & (\mathbb{Z}^r, <_{lex}) \\
R \setminus \{0\} \arrow[urr, "\pi_* \circ \tilde{\nu}_M"'] & &
\end{tikzcd}$$

Casi-valuaciones desde matrices de peso

Sea $\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R$ la proyección tal que $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I \cong R$. Entonces obtenemos un diagrama de pushforward

$$\begin{tikzcd} k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\} \arrow[r, "\tilde{\nu}_M"] \arrow[d, "\pi"'] & (\mathbb{Z}^r, <_{lex}) \\ R \setminus \{0\} \arrow[ur, "\pi_* \circ \tilde{\nu}_M"'] & \end{tikzcd}$$

Definimos $\nu_M : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^r, <_{lex})$ como $\nu_M := \pi_* \circ \tilde{\nu}_M$. Se llama la *casivaluación de la matriz de peso M*

Casi-valuaciones desde matrices de pesos

Lema (Lema 3.2, KM19)

La casivaluación de la matriz de peso $\nu_M : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^r, <_{lex})$ *para* $f \in R \setminus \{0\}$ *se calcula*

$$\nu_M(f) := \min_{<_{lex}} \left\{ \tilde{\nu}_M(\tilde{f}) : \tilde{f} \in k[x_1, \ldots, x_n], \pi(\tilde{f}) = f \right\}.$$

Casi-valuaciones desde matrices de pesos

Lema (Lema 3.2, KM19)

La casivaluación de la matriz de peso $\nu_M : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^r, <_{lex})$ *para* $f \in R \setminus \{0\}$ *se calcula*

$$\nu_M(f) := \min_{<_{lex}} \left\{ \tilde{\nu}_M(\tilde{f}) : \tilde{f} \in k[x_1, \ldots, x_n], \pi(\tilde{f}) = f \right\}.$$

Es decir, para $f \in R \setminus \{0\}$ tenemos

$$\nu_M(f) = \min_{<_{lex}} \left\{ \max_{<_{lex}} (M\alpha : c_\alpha \neq 0) : \tilde{f} = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n], \pi(\tilde{f}) = f \right\}$$

Para calcular casivaluaciones de matrices de pesos de manera más eficiente vamos a utilizar ciertas bases del álgebra R.

Ejercicio: Casi-valuaciones

Ejercicio 2

Fijamos $<_{lex}$ en $\mathbb{Z}^2$ y consideramos el álgebra

$$R = k[x, y, z]/(x^3 + xz^2 + y^3).$$

Sean $f = x \in R$ y $g = x^2 + z^2 \in R$.

1. *Con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $\nu_M(f), \nu_M(g)$ y $\nu_M(fg)$.*
2. *Con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula $\nu_M(f), \nu_M(g)$ y $\nu_M(fg)$.*

¿Es ν_M una valuación o solo una casivaluación? ¿Qué distingue los dos casos?

Bases adaptadas

Sea $\mathbb{B}$ una k-base de R y $\mathcal{F} = \{F_{\leq a} : a \in \Gamma\}$ una filtración de R con respecto a un grupo ordenado Γ. La base $\mathbb{B}$ se llama *adabtapa a $\mathcal{F}$* si para cada $a \in \Gamma$ tenemos

$$\mathbb{B} \cap F_{\leq a} \quad \text{es una } k\text{-base de } F_{\leq a}.$$

Si $\mathcal{F}$ viene de una (casi)valucación ν decimos que $\mathbb{B}$ es *adabtada a ν*.

Bases adaptadas

Sea $\mathbb{B}$ una k-base de R y $\mathcal{F} = \{F_{\leq a} : a \in \Gamma\}$ una filtración de R con respecto a un grupo ordenado Γ. La base $\mathbb{B}$ se llama *adabtapa a $\mathcal{F}$* si para cada $a \in \Gamma$ tenemos

$$\mathbb{B} \cap F_{\leq a} \quad \text{es una } k\text{-base de } F_{\leq a}.$$

Si $\mathcal{F}$ viene de una (casi)valucación ν decimos que $\mathbb{B}$ es *adabtada a ν*.

Tarea 3 (Comentario 2.30, KM19)

Sea ν una valuación con hojas unidimensionales en R y $\mathbb{B}$ una k-base de R. Muestra que

$$\mathbb{B} \text{ es adaptada a } \nu$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$b \mapsto \nu(b) \quad \text{da una biyección} \quad B \leftrightarrow \nu(R \setminus \{0\})$$

Nota que si las hojas no son unidimensionales tenemos más elementos en la base que valores de ν.

Referencias

- Kiumars Kaveh, Christopher Manon. Khovanskii bases, higher rank valuations, and tropical geometry. SIAM J. Appl. Algebra Geom. 3 (2019), no. 2, 292–336. *arXiv:1610.00298 [math.AG]*
- Kiumars Kaveh, Christopher Manon, Takuya Murata. On degenerations of projective varieties to complexity-one T-varieties. *arXiv:1708.02698 [math.AG]*
- Lara Bossinger. Full-rank Valuations and Toric Initial Ideals. Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, no. 10, 7433–7469. *arXiv:1903.11068 [math.AG]*
- Lara Bossinger, Takuya Murata. A map to a toric variety and a toric degeneration. *arXiv:2210.13137 [math.AG]*