Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Noviembre 9 2022

Contenido

Casi-valuaciones desde matrices de pesos

Para una matriz de peso $M \in \mathbb{Z}^{r \times n}$ construimos una valuación asociada $\tilde{\nu}_M : k[x_1, \ldots, _n] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^r$ como sigue. Para $p \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tomamos su expresión en la base Mon $p = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$ y definimos

$$\tilde{\nu}_M(p) := \max{}_{<_{lex}} \{M\alpha : c_\alpha \neq 0\}. \tag{0.1}$$

Por pushforward obtenemos una casivaluación $\nu_M : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^r$ que se calcula para $f \in R \setminus \{0\}$ (**Lema 3.2**)

$$\nu_M(f) = \min_{<_{lex}} \left\{ \max_{<_{lex}} (M\alpha : c_\alpha \neq 0) : \tilde{f} = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n], \pi(\tilde{f}) = f \right\}$$

Nuestro objetivo es encontrar una base $\mathbb{B}$ de R tal que ν_M se calcula de manera análoga a (0.1) reemplazando Mon por $\mathbb{B}$.

Bases adaptadas

Sea $\mathbb{B}$ una k-base de R y $\mathcal{F} = \{F_{\leq a} : a \in \Gamma\}$ una filtración de R con respecto a un grupo ordenado Γ. La base $\mathbb{B}$ se llama *adabtapa a $\mathcal{F}$* si para cada $a \in \Gamma$ tenemos

$$\mathbb{B} \cap F_{\leq a} \quad \text{es una } k\text{-base de } F_{\leq a}.$$

Si $\mathcal{F}$ viene de una (casi)valucación ν decimos que $\mathbb{B}$ es *adabtada a ν*.

Bases adaptadas

Sea $\mathbb{B}$ una k-base de R y $\mathcal{F} = \{F_{\leq a} : a \in \Gamma\}$ una filtración de R con respecto a un grupo ordenado Γ. La base $\mathbb{B}$ se llama *adabtapa a $\mathcal{F}$* si para cada $a \in \Gamma$ tenemos

$$\mathbb{B} \cap F_{\leq a} \quad \text{es una } k\text{-base de } F_{\leq a}.$$

Si $\mathcal{F}$ viene de una (casi)valucación ν decimos que $\mathbb{B}$ es *adabtada a ν*.

Tarea 1 (Comentario 2.30, KM19)

Sea ν una valuación con hojas unidimensionales en R y $\mathbb{B}$ una k-base de R. Muestra que

$$\mathbb{B} \text{ es adaptada a } \nu$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$b \mapsto \nu(b) \quad \text{da una biyección} \quad B \leftrightarrow \nu(R \setminus \{0\})$$

Nota que si las hojas no son unidimensionales tenemos más elementos en la base que valores de ν.

Ejercicio: base adaptada

Ejercicio 1

Sea $R = k[x,y,z]/(x^3 + xz^2 + y^3)$ *y* $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ *la matriz de peso con valuación* (**Ejercicio 2, nov 8**)

$$\nu_M : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^2, <_{lex}).$$

Consideramos dos bases de R

$$\mathbb{B}_1 = \{x^a y^b z^c \in R : a < 3\} \quad y \quad \mathbb{B}_2 = \{x^a y^b z^c \in R : b < 3\}$$

¿Son bases adaptadas a ν_M*? Tipp: Verifica si existe un elemento* $b_j \in \mathbb{B}_i$ *para cada punto de forma* $(3,j) \in \Gamma_{\nu_M}$*, es decir* $\nu_M(b_j) = (3,j)$*.*

Ejemplo patológico y su base adaptada

Recuerda nuestro ejemplo patológico: Sea $R = k[tx, t^2x, (1+t^4)x]$ con $\deg(x^a f(t)) = a$ y valuación extendida $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ donde $\hat{\nu}(f(t)x^a) = (a, \deg(f(t))$.

Sea $\mathbb{B}$ la base de R cuyos elementos de grado p son

$$t^2x^p, t^3x^p, \ldots, t^{4p-4}x^p, (t+t^{4p-3})x^p, t^{4p-2}x^p, (1+t^{4p})x^p$$

Verificamos que $\hat{\nu}(R \setminus \{0\}) = \hat{\nu}(\mathbb{B})$ por lo tanto la tarea anterior implica que $\mathbb{B}$ es una base adaptada.

Bases adaptadas de monomios estándar

Recureda que los conos maximales en el abanico de Gröbner corresponden a ideales iniciales monomiales $\mathrm{in}_{\prec}(I)$ con respecto a ordenes monomiales totales $\prec$. Definimos *bases de monomios estándar* asociados:

$$\mathbb{B}_{\prec} := \{\pi(x^\alpha) \in R : x^\alpha \not\in \mathrm{in}_{\prec}(I)\}$$

Escribimos $b_\alpha = \pi(x^\alpha) \in \mathbb{B}_{\prec}$ para los monomios estándar.

Bases adaptadas de monomios estándar

Recureda que los conos maximales en el abanico de Gröbner corresponden a ideales iniciales monomiales $\text{in}_{\prec}(I)$ con respecto a ordenes monomiales totales $\prec$. Definimos *bases de monomios estándar* asociados:

$$\mathbb{B}_{\prec} := \{\pi(x^{\alpha}) \in R : x^{\alpha} \notin \text{in}_{\prec}(I)\}$$

Escribimos $b_{\alpha} = \pi(x^{\alpha}) \in \mathbb{B}_{\prec}$ para los monomios estándar.

Proposición (Proposición 3.3, KM19)

Sea $M \in C^{r}_{\prec}(I)$ una matriz de pesos en la cerradura del cono maximal asociado al orden monomial $\prec$ en el abanico de Gröbner de rango r. Para $f \in R \setminus \{0\}$ sea $\sum_{b_{\alpha} \in \mathbb{B}_{\prec}} c_{\alpha} b_{\alpha} = f$ su expresión en la base $\mathbb{B}_{\prec}$. Entonces,

$$\nu_M(f) = \max_{lex}\{M\alpha : c_{\alpha} \neq 0\}.$$

En particular, $\mathbb{B}_{\prec}$ es adaptada a ν_M.

Ejercicio: bases de monomios estándar adaptadas

Ejercicio 2

Sea $R = k[x, y, z]/(x^3 + xz^2 + y^3)$ *y* $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ *la matriz de peso con valuación (***Ejercicio 2, nov 8***)*

$$\nu_M : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^2, <_{lex}).$$

Calcula las bases de monomios estándar de R *que son adaptadas a* ν_M*.*

Prueba de la Proposición 3.3

Nota que el orden $\prec$ refine la graduación con respecto a la matriz de pesos $\mathrm{in}_{\prec}(\mathrm{in}_M(I)) = \mathrm{in}_{\prec}(I)$. Por lo tanto si $x^\alpha + \sum_\beta c_\beta x^\beta \in \mathrm{in}_M(I)$ existe x^β con $c_\beta \neq 0$ tal que $x^\beta \in \mathrm{in}_{\prec}(I)$, es decir x^β *no es estándar*.

Prueba de la Proposición 3.3

Nota que el orden $\prec$ refine la graduación con respecto a la matriz de pesos $\mathrm{in}_\prec(\mathrm{in}_M(I)) = \mathrm{in}_\prec(I)$. Por lo tanto si $x^\alpha + \sum_\beta c_\beta x^\beta \in \mathrm{in}_M(I)$ existe x^β con $c_\beta \neq 0$ tal que $x^\beta \in \mathrm{in}_\prec(I)$, es decir x^β *no es estándar*.

Tratamos primero el caso $f = b_\alpha$. Tenemos

$$\nu_M(b_\alpha) = \min_{lex} \left\{ \max_{lex} \left(M\gamma : c_\gamma \neq 0 \right) : \pi \left(\sum_\gamma c_\gamma x^\gamma \right) = b_\alpha \right\}.$$

Prueba de la Proposición 3.3

Nota que el orden $\prec$ refine la graduación con respecto a la matriz de pesos $\mathrm{in}_\prec(\mathrm{in}_M(I)) = \mathrm{in}_\prec(I)$. Por lo tanto si $x^\alpha + \sum_\beta c_\beta x^\beta \in \mathrm{in}_M(I)$ existe x^β con $c_\beta \neq 0$ tal que $x^\beta \in \mathrm{in}_\prec(I)$, es decir x^β *no es estándar*.

Tratamos primero el caso $f = b_\alpha$. Tenemos

$$\nu_M(b_\alpha) = \min_{lex}\left\{\max_{lex}(M\gamma : c_\gamma \neq 0) : \pi\left(\sum_\gamma c_\gamma x^\gamma\right) = b_\alpha\right\}.$$

Hay que mostrar que $\max_{lex}(M\gamma : c_\gamma \neq 0) \geq M\alpha$ para todo $\pi(\sum_\gamma c_\gamma x^\gamma) = b_\alpha$. Supongamos de lo contrario que existe $g = x^\alpha + \sum_\beta x^\beta c_\beta \in I$ tal que $M\beta <_{lex} M\alpha$. En este caso $\mathrm{in}_M(g) = x^\alpha$, una contradicción puesto que x^α es estándar.

Prueba de la Proposición 3.3

Seguimos con el caso general de $f = \sum_{b_\alpha \in \mathbb{B}_\prec} c_\alpha b_\alpha$. Por la definición **(1')** de casivaluación tenemos

$$\nu_M(f) \leq \max_{lex}\{\nu_M(b_\alpha) : c_\alpha \neq 0\} = \max_{lex}\{M\alpha : c_\alpha \neq 0\}.$$

Prueba de la Proposición 3.3

Seguimos con el caso general de $f = \sum_{b_\alpha \in \mathbb{B}_\prec} c_\alpha b_\alpha$. Por la definición **(1')** de casivaluación tenemos

$$\nu_M(f) \leq \max_{lex}\{\nu_M(b_\alpha) : c_\alpha \neq 0\} = \max_{lex}\{M\alpha : c_\alpha \neq 0\}.$$

Sea $\tilde{f} = \sum c_\alpha x^\alpha$ y $M\gamma = \max_{lex}\{M\alpha : c_\alpha \neq 0\}$. Supongamos que existe $\tilde{h} = \sum c'_\beta x^\beta$ con $M\beta < M\gamma$ y $\pi(\tilde{h}) = f$. Entonces,

$$g := \sum c_\alpha x^\alpha - \sum c'_\beta x^\beta \in I.$$

$M\beta <_{lex} M\gamma$ implica que ningún termino de $\tilde{h}$ está en $\mathrm{in}_M(g)$. Por lo tanto, todos los monomios de $\mathrm{in}_M(g)$ son estándar, una contradicción. ■

Asociado graduado de casivaluaciones

El siguiente resultado es un paso clave en la prueba del criterio para bases de Khovanskii **[Teorema 1, B21]**.

Lema (Lema 3.4, KM19)

Sea R un álgebra graduada presentada por el ideal primo homogéneo $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$. Escribimos $\mathrm{gr}_M(R)$ para el anillo asociado graduado de la casivaluación ν_M (más precisamente, de su filtración). Entonces,

$$\mathrm{gr}_M(R) \cong k[x_1, \ldots, x_n]/ \mathrm{in}_M(I).$$

Asociado graduado de casivaluaciones

El siguiente resultado es un paso clave en la prueba del criterio para bases de Khovanskii **[Teorema 1, B21]**.

Lema (Lema 3.4, KM19)

Sea R un álgebra graduada presentada por el ideal primo homogéneo $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$. Escribimos $\mathrm{gr}_M(R)$ para el anillo asociado graduado de la casivaluación ν_M (más precisamente, de su filtración). Entonces,

$$\mathrm{gr}_M(R) \cong k[x_1, \ldots, x_n]/\operatorname{in}_M(I).$$

Proposición (Proposición 3.6, KM19)

La casivaluación ν_M es una valuación si y solo si $\mathrm{gr}_M(R)$ es un domino entero (es decir, si y solo si $\mathrm{in}_M(I)$ es primo).

Ejercicio: asociado graduado de casivaluaciones

Ejercicio 3

Sea $R = k[x,y,z]/(x^4 + xyz^2 + yz^3 + y^4)$. *Cuales de las siguientes matrices determinan una valuación* ν_M *en* R*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Valuaciones y matrices de pesos

Regresando a nuestra motivación: dado $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación homogénea con hojas unidimensionales de rango completo como podemos saber si un conjunto $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ es una base de Khovanskii?

Sea $R \cong k[x_1, \dots, x_n]/I$ con I primo y homogéneo tal que $\pi(x_i) = b_i \in R$. Definimos

$$M_{\nu;\mathcal{B}} := (\nu(b_1), \dots, \nu(b_n)) \in \mathbb{Z}^{d \times n}.$$

Proposición (Proposición 1, B21)

Tenemos $\nu = \nu_{M_\nu}$ si y solo si rango$(M_\nu) = d$ y $\mathrm{in}_{M_\nu}(I)$ es primo.

Nota que rango$(M_\nu) = $ rango$(\Gamma_{\nu_{M_\nu}})$.

Eslogan: *Si escogemos $b_1, \dots, b_n$* **bien**, *tenemos $\nu = \nu_{M_\nu}$.*

Referencias

- Kiumars Kaveh, Christopher Manon. Khovanskii bases, higher rank valuations, and tropical geometry. SIAM J. Appl. Algebra Geom. 3 (2019), no. 2, 292–336. *arXiv:1610.00298 [math.AG]*
- Kiumars Kaveh, Christopher Manon, Takuya Murata. On degenerations of projective varieties to complexity-one T-varieties. *arXiv:1708.02698 [math.AG]*
- Lara Bossinger. Full-rank Valuations and Toric Initial Ideals. Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, no. 10, 7433–7469. *arXiv:1903.11068 [math.AG]*
- Lara Bossinger, Takuya Murata. A map to a toric variety and a toric degeneration. *arXiv:2210.13137 [math.AG]*