Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Octubre 11 2022

Contenido

Recordatorio

Sea $k \subset K$ una extensión de cuerpos y $\mathbb{Z}^d$ es un grupo ordenado con $\prec$.
Una *valuación* es $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ que cumple

$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g), \ \nu(fg) \succeq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$$

Sea $V \subset K$ un k-especia vectorial de dimensión finita,
$V^m := \langle f_1 \cdots f_m : f_i \in V \rangle \subset K$ y su *anillo graduado* $R(V) := \bigoplus_{m \geq 0} V^m$.
Extendemos el orden a $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ con

$$(m_1, u_2) \leq (m_2, u_2) \quad \text{sii} \quad m_1 < m_2 \ \text{ o } \ m_1 = m_2, u_1 \succ u_2.$$

Nos permite definir la *valuación extendida* $\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$

$$R(V) \ni f = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i f_i, f_i \in V^i : \quad \hat{\nu}(f) = (m, \nu(f_m)), \ \text{donde } \deg(f) = m$$

El *semigrupo graduado* asociado es

$$\Gamma(V) := \Gamma_\nu(V) := \{(m, \nu(f)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : f \in V^m \setminus \{0\}\}.$$

El orden inducido

Ejercicio 1

Sea $(\mathbb{Z}^d, \prec)$ *un grupo ordenado. Entonces el orden inducido en* $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ *respeta a la adición. Por lo tanto,* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ *es un grupo ordenado con*

$$(m_1, u_2) \leq (m_2, u_2) \quad \textit{sii} \quad m_1 < m_2 \quad \textit{o} \quad m_1 = m_2, u_1 \succ u_2.$$

Tarea 1

Sea $R = R(V)$ *y* $\Gamma = \Gamma_\nu(V)$*. Entonces para cada* $(m, u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ *el siguiente conjunto es finito*

$$\Gamma_{\leq (m,u)} := \{(m', u') \in \Gamma : (m', u') \leq (m, u)\}$$

Una filtración en $R(V)$

Tarea 2 (Lema 1, Anderson)

Sea $R = R(V)$ *y* $\Gamma = \Gamma_\nu(V)$. *Entonces*

1. *Para cada* $(m, u) \in \Gamma$ *el siguiente conjunto es un espacio vectorial de dimensión finita (i.e. cerrado bajo adición)*

$$R_{\leq (m,u)} := \{f \in R : \hat{\nu}(f) \leq (m, u)\}.$$

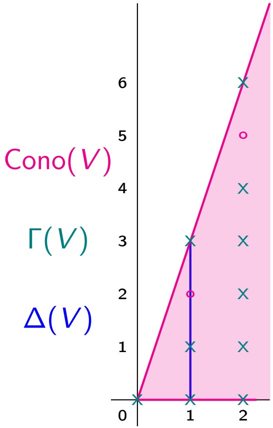
2. *Para cada* $(m, u), (m', u') \in \Gamma$ *tenemos*

$$R_{\leq (m,u)} \cdot R_{\leq (m',u')} \subseteq R_{\leq (m+m',u+u')}.$$

En particular, $\{R_{\leq (m,u)} : (m, u) \in \Gamma\}$ *es una filtración multiplicativa en* R.

Ejemplo 1: una filtración en $R(V)$

Tenemos $V = \langle x_1, x_1x_2, x_1x_2^3\rangle \subset k(x_1,x_2)$ y $\hat{\nu} : R(V)\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ con $\hat{\nu}(x_1^a x_2^b) \mapsto (a,b)$.



$$\Gamma_{\leq(0,0)} = \{(0,0)\}$$
$$\Gamma_{\leq(1,1)} = \{(0,0) < (1,3) < (1,1)\}$$
$$\Gamma_{\leq(1,3)} = \{(0,0) < (1,3)\}$$

$$R_{\leq(1,1)} = \langle 1, x_1x_2, x_1x_2^3\rangle$$
$$R_{\leq(1,3)} = \langle 1, x_1x_2^3\rangle$$
$$R_{\leq(2,4)} = \langle 1, x_1, x_1x_2, x_1x_2^3, x_1^2x_2^6, x_1^2x_2^4\rangle$$

El orden en $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ es $(a,b)\leq(a',b')$ si $a<a'$ o $a=a'$ y $b>b'$.

Recordatoria de la geometría tórica

Recuerda: si $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ es un politopo de latiz de dimensión d entonces, $X_\Delta := X_{k\Delta \cap \mathbb{Z}^d}$ para $k\Delta$ muy amplio. Además $d\Delta$ es muy amplio.

Lema (Corolario 2.10 y 7.45, Bruns–Gubeladze)

Sea $\Gamma \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$ *un semigrupo graduado y supongamos que* $\mathrm{Cono}(\Gamma)$ *es generado por* $\Gamma \cap (\{1\} \times \mathbb{N}^d)$*. Entonces,*

1. Γ *es finitamente generado.*
2. *Sea* $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ *el politopo definido por*

$$\{1\} \times \Delta = \mathrm{Cono}(\Gamma) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^d).$$

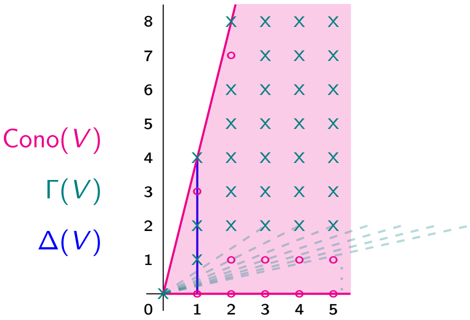
Supongamos que $\{d\} \times (d\Delta \cap \mathbb{N}^d) = \Gamma \cap (\{d\} \times \mathbb{N}^d)$*.*

En este caso $Proj(k[\Gamma])$ *es la variedad (normal) tórica proyectiva de* Δ*.*

Sea $\Gamma_d \subset \Gamma$ el subsemigrupo generado por $\Gamma \cap (\{d\} \times \mathbb{N}^d)$ y supongamos se cumple **(2)**. En este caso $\mathrm{Proj}(k[\Gamma]) \cong \mathrm{Proj}(k[\Gamma_d])$.

Ejemplo patológico

Recuerda el semigrupo $\Gamma(V) \subset \mathbb{N}^2$ generado por $\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,k) : k \geq 2\}$.



Γ no es finitamente generado y Cono(Γ) no es generado por $\Gamma \cap (\{1\} \times \mathbb{N})$.

Además el politopo del Lema es el $[4,0)$ y no todos sus puntos enteros están en Γ.

El anillo graduado asociado

Definimos $R_{<(m,u)}$ de manera análoga a $R_{\leq(m,u)}$. El *anillo graduado asociado* a la filtración multiplicativa $\{R_{\leq(m,u)} : (m,u) \in \Gamma\}$ es

$$\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R := \bigoplus_{(m,u)\in\Gamma} R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}$$

Tarea 3

Verifica que $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ es un anillo y que es Γ-graduado.

Ejercicio 2

En el Ejemplo 1 calcula las componentes graduadas $R_{\leq(a,b)}$ con $(a,b) \leq (2,0)$. ¿Cuál es el anillo graduado asociado?

Rango completo

Definimos el rango $r(\hat{\nu})$ de la valuación $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ como el rango del grupo generado por su imagen $\Gamma_{\hat{\nu}}$.

Proposición 1 (Pilant, Proposición 3.1 Teissier)

Tenemos $\dim gr_{\hat{\nu}} R = r(\hat{\nu})$.

Proposición 2 (Teissier, p.17)

Se cumple la desigualdad de Abhyankar: $r(\hat{\nu}) \leq \dim R$.

Si $r(\hat{\nu}) = \dim R$ decimos que $\hat{\nu}$ es de *rango completo*. En este caso, como consecuencia de la desigualdad de Abhyankar tenemos

$$\dim \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R = r(\hat{\nu}) = \dim R.$$

Hojas a lo más unidimensionales

Si las cocientes $R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}$ se llaman las hojas de la filtración. Si satisfacen

$$\dim_k(R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}) \leq 1 \quad \forall\ (m,u) \in \Gamma$$

se dice que $\hat{\nu}$ tiene *hojas a lo más unidimensionales*.

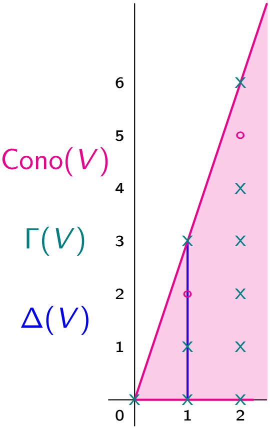
Tarea 4

Sean $R_{\hat{\nu}} := \{f \in K \setminus \{0\} : \hat{\nu}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ el anillo de la valuación, $m_\nu := \{f \in K \setminus \{0\} : \hat{\nu}(f) > 0\} \cup \{0\}$ su ideal maximal y $k_{\hat{\nu}} = R_{\hat{\nu}}/m_{\hat{\nu}}$ el campo residual. Como $\hat{\nu}(c) = 0$ para $c \in k$ tenemos $k \subset k_{\hat{\nu}}$. Verifica que

1. *$\hat{\nu}$ tiene hojas a lo más unidimensionales $\quad \Leftrightarrow \quad k = k_{\hat{\nu}}$*
2. *Si $\hat{\nu}$ es de rango completo, tiene hojas a lo más unidimensionales.*
3. *Si $\hat{\nu}$ tiene hojas a lo más unidimensionales, entonces $gr_{\hat{\nu}}R \cong k[\Gamma_{\hat{\nu}}]$.*

Ejemplo 1: las hojas

Tenemos $V = \langle x_1, x_1x_2, x_1x_2^3 \rangle \subset k(x_1, x_2)$ y $\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ con $\hat{\nu}(x_1^a x_2^b) \mapsto (a, b)$.



$$R_{\leq(1,1)} = \langle 1 < x_1x_2^3 < x_1x_2 \rangle$$

$$R_{\leq(1,3)} = \langle 1 < x_1x_2^3 \rangle$$

$$R_{\leq(2,4)} = \begin{array}{c} \langle 1 < x_1x_2^3 < x_1x_2 < x_1 \\ < x_1^2x_2^6 < x_1^2x_2^4 \rangle \end{array}$$

$$R_{\leq(1,1)}/R_{<(1,1)} = \langle x_1x_2 \rangle$$

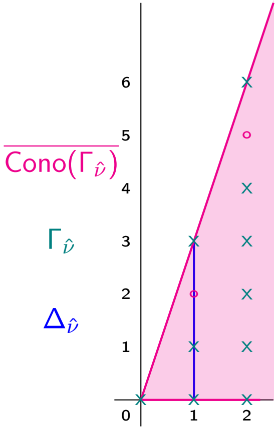
$$R_{\leq(1,3)}/R_{<(1,3)} = \langle x_1x_2^3 \rangle$$

$$R_{\leq(2,4)}/R_{<(2,4)} = \langle x_1^2x_2^4 \rangle$$

El orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ es $(a, b) \leq (a', b')$ si $a < a'$ o $a = a'$ y $b > b'$.

Ejemplo 2

Consideramos $R = k[x,y,z]/(g)$ con $g = x^3 + x^2z + xz^2 + y^3$ y la valuación $\hat{\nu}(x) = (1,3), \hat{\nu}(y) = (1,1)$ y $\hat{\nu}(z) = (1,0)$.



Ejercicio:

1. Calcula $\dim R$.
2. Calcula $\hat{\nu}(xz^2), \hat{\nu}(y^3)$ y $\hat{\nu}(xz^2 + y^3)$.
3. Calcula $R_{\leq(3,3)}$ y $R_{\leq(3,3)}/R_{<(3,3)}$.
4. Calcula $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$.

El orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ es $(a,b) \leq (a',b')$ si $a < a'$ o $a = a'$ y $b > b'$.

Bibliografia

- Anderson, D. *Okounkov bodies and toric degnerations*, Math. Ann. (2013) 356:1183–1202, `https://arxiv.org/abs/1001.4566`
- Bruns, W. y Gubeladze, J. Polytopes, Rings and K-Theory. Springer Monographs in Mathematics, 2009
- Teissier, B. Valuations, deformations, and toric geometry, `https://arxiv.org/abs/math/0303200`