Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Octubre 12 2022

Contenido

El rango y el graduado asociado

Definimos el rango $r(\hat{\nu})$ de la valuación $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ como el rango del grupo generado por su imagen $\Gamma_{\hat{\nu}}$.

En **Ejemplo 1** el semigrupo $\langle (1,0),(1,1),(1,3) \rangle \subset \mathbb{Z}^2$ es de rango 2.

Proposición 1 (Pilant, Proposición 3.1 Teissier)

Sea $r(\hat{\nu}) = r(\Gamma_{\hat{\nu}})$ *y* $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R = \bigoplus_{(m,u)\in\Gamma_{\hat{\nu}}} R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}$. *Entonces,*

$$\dim gr_{\hat{\nu}} R = r(\hat{\nu}).$$

Recuerda: si $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ es un semigrupo y $k[\Gamma]$ su álgebra. Entonces, $\mathrm{Spec}(k[\Gamma])$ es una variedad tórica afín con $M = \langle \Gamma \rangle$ su latiz de caracteres. Tenemos

$$\dim k[\Gamma] = \dim \mathrm{Spec}(k[\Gamma]) = \mathrm{rango}(M) = r(\Gamma).$$

La desigualdad de Abhyankar

Sea $R = R(V)$ y la valuación $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ con su imagen el semigrupo graduado $\Gamma_{\hat{\nu}}$.

Proposición 2 (Teissier, p.17)

Se cumple la desigualdad de Abhyankar: $r(\hat{\nu}) \leq \dim R$.

Prueba: Tenemos una proyección de álgebras graduadas

$$\pi_{\hat{\nu}} : R \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R, \quad f \mapsto R_{\leq \hat{\nu}(f)} / R_{< \hat{\nu}(f)}.$$

Por lo tanto $R / \ker(\pi_{\hat{\nu}}) \cong \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ y $r(\hat{\nu}) = \dim \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R \leq \dim R$. ■

Si $r(\hat{\nu}) = \dim R$ decimos que $\hat{\nu}$ es de *rango completo*. En este caso, como consecuencia de la desigualdad de Abhyankar y la Proposición de Pilant tenemos

$$\dim \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R = r(\hat{\nu}) = \dim R.$$

Hojas unidimensionales

Si las cocientes $R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}$ se llaman las *hojas* de la filtración. Si satisfacen

$$\dim_k(R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}) \leq 1 \quad \forall\ (m,u) \in \Gamma$$

se dice que $\hat{\nu}$ tiene *hojas unidimensionales*.

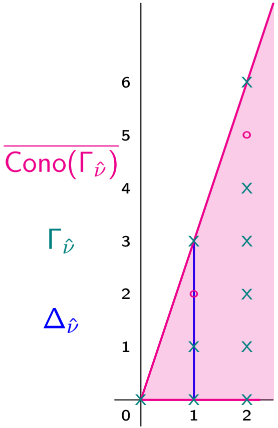
Tarea 1

Sean $R_{\hat{\nu}} := \{f \in K \setminus \{0\} : \hat{\nu}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ el anillo de la valuación, $m_\nu := \{f \in K \setminus \{0\} : \hat{\nu}(f) > 0\} \cup \{0\}$ su ideal maximal y $k_{\hat{\nu}} = R_{\hat{\nu}}/m_{\hat{\nu}}$ el campo residual. Como $\hat{\nu}(c) = 0$ para $c \in k$ tenemos $k \subset k_{\hat{\nu}}$. Verifica que

1. *$\hat{\nu}$ tiene hojas unidimensionales* $\quad \Leftrightarrow \quad k = k_{\hat{\nu}}$
2. *Si $\hat{\nu}$ es de rango completo, tiene hojas unidimensionales.*
3. *Si $\hat{\nu}$ tiene hojas unidimensionales, entonces $gr_{\hat{\nu}}R \cong k[\Gamma_{\hat{\nu}}]$.*

Ejemplo 2

Consideramos $R = k[x,y,z]/(g)$ con $g = x^3 + x^2z + xz^2 + y^3$ y la valuación $\hat{\nu}(x) = (1,3), \hat{\nu}(y) = (1,1)$ y $\hat{\nu}(z) = (1,0)$.



Ejercicio:

1. Calcula $\dim R$.
2. Calcula $\hat{\nu}(xz^2), \hat{\nu}(y^3)$ y $\hat{\nu}(xz^2 + y^3)$.
3. Calcula $R_{\leq(3,3)}$ y $R_{\leq(3,3)}/R_{<(3,3)}$.
4. Calcula $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$.

El orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ es $(a,b) \leq (a',b')$ si $a < a'$ o $a = a'$ y $b > b'$.

Ejemplo 2

Consideramos $R = k[x,y,z]/(g)$ con $g = x^3 + x^2z + xz^2 + y^3$ y la valuación $\hat{\nu}(x) = (1,3), \hat{\nu}(y) = (1,1)$ y $\hat{\nu}(z) = (1,0)$. Recuerda el orden en $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ es $(a,b) \leq (a',b')$ si $a < a'$ o $a = a'$ y $b > b'$.

1. $\dim R = 2$ (superficie en k^3).
2. $\hat{\nu}(xz^2) = \hat{\nu}(x) + \hat{\nu}(z^2) = (1,3) + (1,0) = (3,3)$
   $\hat{\nu}(y^3) = (3,3)$
   $$\begin{aligned} \hat{\nu}(xz^2 + y^3) &\overset{\text{mod } (g)}{=} \hat{\nu}(x^3 + x^2z) = \min_<\{\hat{\nu}(x^3), \hat{\nu}(x^2z)\} \\ &= \min_<\{(3,9),(3,6)\} = (3,9). \end{aligned}$$
3. $R_{\leq(3,3)} = \langle x^3 < x^2y < x^2z < xy^2 < xz^2, y^3 \rangle \cup R_2 \cup R_1 \cup k$
   nota que $R_{\leq(3,3)} \not\ni xyz < y^2z < yz^2 < z^3$
   tenemos $-y^3 \overset{\text{mod } (g)}{=} xz^2 + x^3 + x^2z$, con $x^3 + x^2z \in R_{<(3,3)}$
   $R_{\leq(3,3)}/R_{<(3,3)} = \langle xz^2 \rangle \Rightarrow -y^3 \equiv xz^2$ en $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$
4. $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R = k[\Gamma_{\hat{\nu}}] \cong k[x,y,z]/(y^3 + xz^2)$

Una proyección que respeta el orden

Lema (Lema 8, Anderson)

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ *un conjunto finito. Entonces, existe una proyección* $\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$ *tal que para cada* $(m, u), (m', u') \in \mathcal{S}$

$$(m, u) < (m', u') \quad \Rightarrow \quad \pi(m, u) < \pi(m', u')$$

donde el orden en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ *es el orden extendido de* $\prec_{lex}$ *en* $\mathbb{Z}^d$.

Prueba: Sea $C \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ más grande que cada entrada de $(m, u) - (m', u')$ para todas las $(m, u), (m', u') \in \mathcal{S}$ y sean $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ tal que $\alpha_k > C(\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_d)$ para cada $k \geq 0$.

Entonces, $\pi(m, u) := \alpha_0 m - \sum_{i=1}^{d} u_i \alpha_i \geq 0$ satisface las condiciones. ■

Ejercicio 1

Para el Ejemplo 1: define una proyección que cumple el Lema 8 con respecto al conjunto $\{(3, 3), (3, 6), (3, 9)\}$.

Ejemplo 2

Sea $R = k[x,y,z]/(g)$ donde $g = x^3 + x^2z + xz^2 + y^3$ con valuación $\hat{\nu}(x) = (1,3), \hat{\nu}(y) = (1,0)$ y $\hat{\nu}(z) = (1,0)$. Calculamos

$$\hat{\nu}(x^3) = (3,9) \ < \ \hat{\nu}(x^2z) = (3,6) \ < \ (3,3) = \hat{\nu}(xz^2) \ = \ \hat{\nu}(y^3)$$

Por lo tanto en $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$: $\overline{xz^2} = \overline{y^3}$.

Podemos realizar $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ como degeneración de Gröbner utilizando la proyección $\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida a base del conjunto $\{(3,9) < (3,6) < (3,3)\}$. Por ejemplo

$$\pi(a,b) = 5a - b$$

cumple con el **Lema 8**. Las proyecciones de los generadores de $\Gamma_{\hat{\nu}}$, $(1,3), (1,1), (1,0)$ son $2, 4, 5$. Calculamos

$$\mathrm{in}_{(2,4,5)}(g) = xz^2 + y^3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R \cong k[x,y,z]/\,\mathrm{in}_{(2,4,5)}(g)$$

Una degeneración tórica

Proposición 3 (Proposición 3, Anderson)

Sea $R = R(V)$ y supongamos que $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ es finitamente generado (entonces, $\Gamma_{\hat{\nu}} = \Gamma(V)$ es finitamente generado también). En este caso existe un álgebra $\mathcal{R} \subset R[t]$ que es finitamente generada, $\mathbb{N}$-graduada, y plano como $k[t]$-modulo tal que

1. $\mathcal{R}/t\mathcal{R} \cong \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ *y*
2. $\mathcal{R}[t^{-1}] \cong R[t, t^{-1}]$ *como* $k[t, t^{-1}]$*-álgebras.*

Idea de la Prueba: Construir un álgebra $\mathcal{R}$ y probar que cumple con la Proposición utilizando la proyección y la conexión con los ideales iniciales.

Una $\mathbb{N}$-filtración inducida

Dado la filtración $\{R_{\leq(m,u)} : (m,u) \in \Gamma \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d\}$ y la proyección $\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$. Nota que por construcción $\pi(\Gamma_{\hat{\nu}}) \subset \mathbb{N}$.
Obtenemos una $\mathbb{N}$-filtración, para $k \in \mathbb{N}$

$$R_{\leq k} := \{f \in R : \pi(\hat{\nu}(f)) \leq k\}$$

El anillo asociado graduado es

$$\mathrm{gr}_{\pi\circ\hat{\nu}} R = \bigoplus_{k\geq 0} R_{\geq k}/R_{>k}$$

Ejercicio 2

En el Ejemplo 2 con la proyección $\pi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ definida por $\pi(a,b) = 5a - b$ muestra que $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R \cong \mathrm{gr}_{\pi\circ\hat{\nu}} R$. ¿Siempre se cumple?

El álgebra de Rees de una $\mathbb{N}$-filtración

Dado la filtración $\{R_{\leq k} : k \in \mathbb{N}\}$ en R definimos el *álgebra de Rees*

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{\leq k} t^k \subset R[t].$$

Nota: $\mathcal{R}$ tiene una $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-graduación: la $\mathbb{N}$-graduación de $k[t]$ y la $\mathbb{N}$-graduación de $R = \bigoplus_{m \geq 0} V^m$.

Afirmación: $\mathcal{R}$ es un $k[t]$-modulo libre que cumple

1. $\mathcal{R}/t\mathcal{R} \cong \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$
2. $\mathcal{R}[t^{-1}] \cong R[t, t^{-1}]$.

Idea de la Prueba: realizar $\mathcal{R}$ como una degeneración de Gröbner.

1. Presentación de $R \cong S/I$ donde $S = k[x_1, \ldots, x_n]$
2. Mostrar que $\mathcal{R} \cong S[t]/I^w$ donde $w = (\pi(\hat{\nu}(\bar{x}_1)), \ldots, \pi(\hat{\nu}(\bar{x}_n)))$.

Bibliografia

- Anderson, D. *Okounkov bodies and toric degenerations*, Math. Ann. (2013) 356:1183–1202 `https://arxiv.org/abs/1001.4566`
- Bruns, W. y Gubeladze, J. Polytopes, Rings and K-Theory. Springer Monographs in Mathematics, 2009
- Teissier, B. Valuations, Deformations, and Toric Geometry. `https://arxiv.org/abs/math/0303200`
- Swanson, I. y Huneke, C. Integral closure of Ideals, Rings, and Modules. `https://www.math.purdue.edu/~iswanso/book/SwansonHuneke.pdf`