Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Octubre 18 2022

Contenido

El álgebra de Rees de una $\mathbb{N}$-filtración

Dado la filtración $\{R_{\leq k} : k \in \mathbb{N}\}$ en R definimos el *álgebra de Rees*

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{\leq k} t^k \subset R[t].$$

El álgebra de Rees de una $\mathbb{N}$-filtración

Dado la filtración $\{R_{\leq k} : k \in \mathbb{N}\}$ en R definimos el *álgebra de Rees*

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{\leq k} t^k \subset R[t].$$

Nota: $\mathcal{R}$ tiene una $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-graduación: la $\mathbb{N}$-graduación de $k[t]$ y la $\mathbb{N}$-graduación de $R = \bigoplus_{m \geq 0} V^m$.

El álgebra de Rees de una $\mathbb{N}$-filtración

Dado la filtración $\{R_{\leq k} : k \in \mathbb{N}\}$ en R definimos el *álgebra de Rees*

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{\leq k} t^k \subset R[t].$$

Nota: $\mathcal{R}$ tiene una $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-graduación: la $\mathbb{N}$-graduación de $k[t]$ y la $\mathbb{N}$-graduación de $R = \bigoplus_{m \geq 0} V^m$.

Afirmación: $\mathcal{R}$ es un $k[t]$-modulo libre que cumple

1. $\mathcal{R}/t\mathcal{R} \cong \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$
2. $\mathcal{R}[t^{-1}] \cong R[t, t^{-1}]$.

El álgebra de Rees de una $\mathbb{N}$-filtración

Dado la filtración $\{R_{\leq k} : k \in \mathbb{N}\}$ en R definimos el *álgebra de Rees*

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{\leq k} t^k \subset R[t].$$

Nota: $\mathcal{R}$ tiene una $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-graduación: la $\mathbb{N}$-graduación de $k[t]$ y la $\mathbb{N}$-graduación de $R = \bigoplus_{m \geq 0} V^m$.

Afirmación: $\mathcal{R}$ es un $k[t]$-modulo libre que cumple

1. $\mathcal{R}/t\mathcal{R} \cong \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$
2. $\mathcal{R}[t^{-1}] \cong R[t, t^{-1}]$.

Idea de la Prueba: realizar $\mathcal{R}$ como una degeneración de Gröbner.

1. Presentación de $R \cong S/I$ donde $S = k[x_1, \ldots, x_n]$
2. Mostrar que $\mathcal{R} \cong S[t]/I^w$ donde $w = (\pi(\hat{\nu}(\bar{x}_1)), \ldots, \pi(\hat{\nu}(\bar{x}_n)))$.

Recuerda de la teoría de Gröbner

$S = k[x_1, \dots, x_n]$, $I \subset S$ un ideal con $<$ orden monomial

1. existe $w \in \mathbb{N}^n$ tal que $\mathrm{in}_<(I) = \mathrm{in}_w(I)$;
2. la homogenización $I^w \subset S[t]$ es un ideal $(w, 1)$-homogéneo con $\deg_{(w,1)}(t) = 1$;
3. si I es v-homogéneo con respecto a algún $v \in \mathbb{Z}^n_{>0}$, entonces I^w es $(v, 0)$-homogéneo.
4. $S[t]/I^w$ es un $k[t]$-modulo libre y define una familia plana con fibra especial $S/\mathrm{in}_w(I)$ y fibra genérica S/I.

Prueba de la Proposición 3

(1) Escogemos generadores homogéneos $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n \in \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ con $\deg(\bar{f}_i) = (m_i, u_i) \in \Gamma_{\hat{\nu}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. Entonces, $\bar{f}_i \in R_{\leq (m_i,u_i)} / R_{< (m_i,u_i)}$.

Prueba de la Proposición 3

(1) Escogemos generadores homogéneos $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n \in \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ con $\deg(\bar{f}_i) = (m_i, u_i) \in \Gamma_{\hat{\nu}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. Entonces, $\bar{f}_i \in R_{\leq (m_i, u_i)} / R_{< (m_i, u_i)}$.

Sean $f_1, \ldots, f_n \in R$ levantamientos de $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n$ con $f_i \in V^{m_i}$ y $\hat{\nu}(f_i) = (m_i, u_i)$. Toma $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ con $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$-graduación $\deg(x_i) = (m_i, u_i)$.

Prueba de la Proposición 3

(1) Escogemos generadores homogéneos $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n \in \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ con $\deg(\bar{f}_i) = (m_i, u_i) \in \Gamma_{\hat{\nu}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. Entonces, $\bar{f}_i \in R_{\leq (m_i,u_i)}/R_{<(m_i,u_i)}$.

Sean $f_1, \ldots, f_n \in R$ levantamientos de $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n$ con $f_i \in V^{m_i}$ y $\hat{\nu}(f_i) = (m_i, u_i)$. Toma $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ con $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$-graduación $\deg(x_i) = (m_i, u_i)$.

Tenemos un homomorfismo de anillos graduados

$$\psi : S \to \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R, \quad x_i \mapsto \bar{f}_i$$

Sean $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_s$ generadores homogéneos del núcleo de ψ con $\deg(\bar{g}_j) = (n_j, v_j)$.

Prueba de la Proposición 3

(1) Escogemos generadores homogéneos $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n \in \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ con $\deg(\bar{f}_i) = (m_i, u_i) \in \Gamma_{\hat{\nu}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. Entonces, $\bar{f}_i \in R_{\leq (m_i,u_i)}/R_{<(m_i,u_i)}$.

Sean $f_1, \ldots, f_n \in R$ levantamientos de $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n$ con $f_i \in V^{m_i}$ y $\hat{\nu}(f_i) = (m_i, u_i)$. Toma $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ con $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$-graduación $\deg(x_i) = (m_i, u_i)$.

Tenemos un homomorfismo de anillos graduados

$$\psi : S \to \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R, \quad x_i \mapsto \bar{f}_i$$

Sean $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_s$ generadores homogéneos del núcleo de ψ con $\deg(\bar{g}_j) = (n_j, v_j)$. Entonces, $\bar{g}_j(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) = 0$ en $R_{\leq (n_j,v_j)}/R_{<(n_j,v_j)}$.

$$\bar{g}_j(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) = 0 \text{ en } R_{\leq (n_j,v_j)}/R_{<(n_j,v_j)} \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_j(f_1, \ldots, f_n) \in R_{<(n_j,v_j)}$$

Continuación de la prueba de la Proposición 3

Entonces, $\bar{g}_j(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) = 0$ en $R_{\leq (n_j, v_j)}/R_{<(n_j,v_j)}$.

$$\bar{g}_j(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) = 0 \text{ en } R_{\leq (n_j, v_j)}/R_{<(n_j,v_j)} \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_j(f_1, \ldots, f_n) \in R_{<(n_j,v_j)}$$

Continuación de la prueba de la Proposición 3

Entonces, $\bar{g}_j(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) = 0$ en $R_{\leq(n_j,v_j)}/R_{<(n_j,v_j)}$.

$$\bar{g}_j(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) = 0 \text{ en } R_{\leq(n_j,v_j)}/R_{<(n_j,v_j)} \quad \Rightarrow \quad \bar{g}_j(f_1, \dots, f_n) \in R_{<(n_j,v_j)}$$

$R_{<(n_j,v_j)}$ es de dimensión finita y $\Gamma_{<(n_j,v_j)}$ es un conjunto finito por lo tanto existen polinomios $g_j \in \bar{g}_j + S_{<(n_j,v_j)}$ tal que

$$g_j(f_1, \dots, f_n) = 0 \in R.$$

Se pueden escoger tal que son $\mathbb{N}$-homogéneos (pues los f_i son $\mathbb{N}$-homogéneos).

Afirmación: $S/(g_1, \dots, g_s) \cong R$.

Ejemplo 3: una presentación de $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$

Sea $R = k[w, t^2w, (t-t^3)w] \subset k[w,t]$ con $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^2, <_{\mathrm{lex}})$ definido por

$$f(t)w^a \mapsto (a, \deg(f(t))).$$

Ejercicio 1

1. *Verifica que $\Gamma_{\hat{\nu}}$ es finitamente generado y de rango completo.*

   Recuerda el Lema p.7 del 11 de octubre.

2. *Toma un conjunto de generadores homogéneos $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ para $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R \cong k[\Gamma_{\hat{\nu}}]$ y calcula un conjunto de generadores del núcleo de $\psi : S \to \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ donde $S = k[x_1, \dots, x_n]$.*

   Recuerda la construcción de ideales tóricos utilizando el mapeo de las latices de caracteres, e.g. p.1 agosto 21.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

Afirmación: $S/(g_1, \ldots, g_s) \cong R$.

Sea $I = \ker(S \to R)$ y $J = \ker(S \to \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R)$. Entonces, $g_j \in I$ y $\bar{g}_j \in J$.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

Afirmación: $S/(g_1, \ldots, g_s) \cong R$.

Sea $I = \ker(S \to R)$ y $J = \ker(S \to \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R)$. Entonces, $g_j \in I$ y $\bar{g}_j \in J$. Definimos un orden monomial no total:

$$x^a \leq x^b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in [n]} a_i(m_i, u_i) \leq \sum_{i \in [n]} b_i(m_i, u_i).$$

Nota que por construcción $\mathrm{in}_{\leq}(g_j) = \bar{g}_j$, por lo tanto $J \subseteq \mathrm{in}_{\leq}(I)$.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

Afirmación: $S/(g_1, \dots, g_s) \cong R$.

Sea $I = \ker(S \to R)$ y $J = \ker(S \to \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R)$. Entonces, $g_j \in I$ y $\bar{g}_j \in J$. Definimos un orden monomial no total:

$$x^a \leq x^b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in [n]} a_i(m_i, u_i) \leq \sum_{i \in [n]} b_i(m_i, u_i).$$

Nota que por construcción $\mathrm{in}_{\leq}(g_j) = \bar{g}_j$, por lo tanto $J \subseteq \mathrm{in}_{\leq}(I)$.

Para ver $\mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{J}$ sea $h \in I$ entonces $h(f_1, \dots, f_n) = 0 \in R$ lo cual implica que el imagen en $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ satisface

$$\overline{h(f_1, \dots, f_n)} = \bar{h}(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) = 0.$$

Por construcción $\bar{h}$ es la forma $\leq$-inicial de h y por lo anterior está en J.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

Afirmación: $S/(g_1, \ldots, g_s) \cong R$.

Sea $I = \ker(S \to R)$ y $J = \ker(S \to \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R)$. Entonces, $g_j \in I$ y $\bar{g}_j \in J$. Definimos un orden monomial no total:

$$x^a \leq x^b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \in [n]} a_i(m_i, u_i) \leq \sum_{i \in [n]} b_i(m_i, u_i).$$

Nota que por construcción $\mathrm{in}_{\leq}(g_j) = \bar{g}_j$, por lo tanto $J \subseteq \mathrm{in}_{\leq}(I)$.

Para ver $\mathrm{in}_{\leq}(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{J}$ sea $h \in I$ entonces $h(f_1, \ldots, f_n) = 0 \in R$ lo cual implica que el imagen en $\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R$ satisface

$$\overline{h(f_1, \ldots, f_n)} = \bar{h}(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) = 0.$$

Por construcción $\bar{h}$ es la forma $\leq$-inicial de h y por lo anterior está en J.

Consecuencia: $J = \mathrm{in}_{\leq}(I)$ y $\{g_1, \ldots, g_s\}$ es una $\leq$-base de Gröbner de I. En particular $I = (g_1, \ldots, g_s)$. $\square$

Ejemplo 3: levantando la presentación a R

Sea $R = k[w, t^2w, (t-t^3)w] \subset k[w,t]$ con $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^2, <_{\mathrm{lex}})$ definido por $w^a f(t) \mapsto (a, \deg(f(t)))$. Calculamos en el **Ejercicio 1**

$$\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R \cong k[\Gamma_{\hat{\nu}}] \cong k[w, wt^2, wt^3] \cong S/(x_1x_3^2 - x_2^3),$$

$S = k[x_1, x_2, x_3]$, con $\deg(x_1) = \hat{\nu}(w), \deg(x_2) = \hat{\nu}(wt^2)$ y $\deg(x_3) = \hat{\nu}(w(t-t^3))$.

Ejemplo 3: levantando la presentación a R

Sea $R = k[w, t^2w, (t-t^3)w] \subset k[w,t]$ con $\hat{\nu} : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^2, <_{\text{lex}})$ definido por $w^a f(t) \mapsto (a, \deg(f(t)))$. Calculamos en el **Ejercicio 1**

$$\mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R \cong k[\Gamma_{\hat{\nu}}] \cong k[w, wt^2, wt^3] \cong S/(x_1x_3^2 - x_2^3),$$

$S = k[x_1, x_2, x_3]$, con $\deg(x_1) = \hat{\nu}(w), \deg(x_2) = \hat{\nu}(wt^2)$ y $\deg(x_3) = \hat{\nu}(w(t-t^3))$.

Ejercicio 2

Sea $\bar{g} = x_1x_3^2 - x_2^3 \in S$ y $f_1 = w, f_2 = wt^2$ y $f_3 = w(t-t^3)$.

1. *Calcula (n,v) el multigrado de $\bar{g} \in S$ y verifica que $\bar{g}(f_1, f_2, f_3) \in R_{<_{lex}(n,v)}$.*
2. *Busca $g \in S$ tal que $g(f_1, f_2, f_3) = 0$ y $\bar{g}$ es la $\leq$-forma inicial de g.*

   Donde $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \leq x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}$ si y solo si

$$a_1\binom{1}{0} + a_2\binom{1}{2} + a_3\binom{1}{3} \leq_{lex} b_1\binom{1}{0} + b_2\binom{1}{2} + b_3\binom{1}{3}$$

Continuación de la prueba de la Proposición 3

(2) P.D. $S[t]/I^w$ con $w = (\pi(\hat{\nu}(x_1)), \ldots, \pi(\hat{\nu}(x_n)))$ cumple con la **Proposición 3**.

[1] p.11 de las diapositivas del septiembre 13

Continuación de la prueba de la Proposición 3

(2) P.D. $S[t]/I^w$ con $w = (\pi(\hat{\nu}(x_1)), \ldots, \pi(\hat{\nu}(x_n)))$ cumple con la **Proposición 3**.

Recuerda la construcción de un $v \in \mathbb{N}^n$ para cada orden monomial $<$ en S. El vector w es construido de la misma manera para $\leq$ tomando el conjunto $\{(n_j, v_j) : j \in [s]\}$ para π. Entonces,

$$\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_{\leq}(I)$$

[1] p.11 de las diapositivas del septiembre 13

Continuación de la prueba de la Proposición 3

(2) P.D. $S[t]/I^w$ con $w = (\pi(\hat{\nu}(x_1)), \ldots, \pi(\hat{\nu}(x_n)))$ cumple con la **Proposición 3**.

Recuerda la construcción de un $v \in \mathbb{N}^n$ para cada orden monomial $<$ en S. El vector w es construido de la misma manera para $\leq$ tomando el conjunto $\{(n_j, v_j) : j \in [s]\}$ para π. Entonces,

$$\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_{\leq}(I)$$

Sabemos que $S[t]/I^w$ es un $k[t]$-modulo libre **Proposición 3.2.4 HH**[1]. Además el **Corolario 3.2.6, HH** implica

$$\begin{aligned} (S[t]/I^w)/(t) &\cong S/\mathrm{in}_w(I) \cong \mathrm{gr}_{\hat{\nu}} R \\ (S[t]/I^w)/(t-a) &\cong S/I \cong R \end{aligned}$$

Por lo tanto $S[t]/I^w$ cumple con la **Proposición 3**.

[1] p.11 de las diapositivas del septiembre 13

Ejemplo 3: la familia plana

Tenemos $R \cong S/(x_1x_3^2 - x_2^3 - x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2)$ del **Ejercicio 2** y el orden en los monomios de S definido por $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \leq x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leq_{\mathrm{lex}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

Sea $I = (x_1x_3^2 - x_2^3 - x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2) \subset S$.

1. *Busca un vector de peso* $w \in \mathbb{N}^3$ *tal que* $\mathrm{in}_{\leq}(I) = \mathrm{in}_w(I)$.
2. *Define la familia* $S[t]/I^w$.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

P.D. El álgebra de Rees $\mathcal{R} \cong S[t]/I^w$.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

P.D. El álgebra de Rees $\mathcal{R} \cong S[t]/I^w$.

Recuerda que $S[t]/I^w$ es $(w, 1)$-graduado donde $\deg_{(w,1)}(t) = 1$. Además es $\mathbb{N}$-graduado donde $\deg(x_i) = m_i$ y los g_j^w son homogéneos.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

P.D. El álgebra de Rees $\mathcal{R} \cong S[t]/I^w$.

Recuerda que $S[t]/I^w$ es $(w,1)$-graduado donde $\deg_{(w,1)}(t) = 1$. Además es $\mathbb{N}$-graduado donde $\deg(x_i) = m_i$ y los g_j^w son homogéneos.

Recuerda la $\mathbb{N}$-filtración en R es de la forma

$$R_{\leq k} = \langle F = f_{i_1}^{a_1} \dots f_{i_r}^{a_r} : \pi(\hat{\nu}(F)) \leq k \rangle$$

pues los f_i son generadores de R.

Continuación de la prueba de la Proposición 3

P.D. El álgebra de Rees $\mathcal{R} \cong S[t]/I^w$.

Recuerda que $S[t]/I^w$ es $(w,1)$-graduado donde $\deg_{(w,1)}(t) = 1$. Además es $\mathbb{N}$-graduado donde $\deg(x_i) = m_i$ y los g_j^w son homogéneos.

Recuerda la $\mathbb{N}$-filtración en R es de la forma

$$R_{\leq k} = \langle F = f_{i_1}^{a_1} \dots f_{i_r}^{a_r} : \pi(\hat{\nu}(F)) \leq k \rangle$$

pues los f_i son generadores de R. Así obtenemos un isomorfismo

$$S[t]/I^w \to \mathcal{R} = \bigoplus_{k \geq 0} R_{\leq k} t^k, \quad x_i \mapsto t^{w_i} f_i, \; t \mapsto t.$$

■

Resumen

Cada valuación $\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ en un anillo $\mathbb{N}$-graduado finitamente generado que satisface

- $\hat{\nu}$ es de rango completo, y
- el semigrupo graduado $\Gamma_{\hat{\nu}}$ es finitamente generado

induce una degeneración tórica de $\mathrm{Proj}(R(V))$ a la variedad tórica $\mathrm{Proj}(k[\Gamma_{\hat{\nu}}])$ (que no necesariamente es normal). Además la normalización de $\mathrm{Proj}(k[\Gamma_{\hat{\nu}}])$ es la variedad tórica proyectiva

$$X_{\Delta(R,\hat{\nu})}$$

definida por el politopo de Newton–Okounkov $\Delta(R, \hat{\nu})$.

Bibliografia

- Anderson, D. *Okounkov bodies and toric degenerations*, Math. Ann. (2013) 356:1183–1202 https://arxiv.org/abs/1001.4566
- Bruns, W. y Gubeladze, J. Polytopes, Rings and K-Theory. Springer Monographs in Mathematics, 2009
- Teissier, B. Valuations, Deformations, and Toric Geometry. https://arxiv.org/abs/math/0303200
- Swanson, I. y Huneke, C. Integral closure of Ideals, Rings, and Modules. https://www.math.purdue.edu/~iswanso/book/SwansonHuneke.pdf