Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Octubre 26 2022

Contenido

1. Teoría de Gröbner de rango mayor
2. La Tropicalización de rango mayor

Ejemplo 3:

Recuerde el **Ejemplo 3**: $R \cong S/(x_1x_3^2 - x_2^3 - x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2)$ y el orden (parcial) monomial definido por $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \leq x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leq_{\text{lex}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3:

Recuerde el **Ejemplo 3**: $R \cong S/(x_1x_3^2 - x_2^3 - x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2)$ y el orden (parcial) monomial definido por $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \leq x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leq_{\text{lex}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ junto con el orden $\leq_{\text{lex}}$ funcionan como un vector de peso $w \in \mathbb{R}$ y el orden $<$ en $\mathbb{R}$. Los monomios obtienen *multipesos* al multiplicar su vector exponente con la matriz

Ejemplo 3:

Recuerde el **Ejemplo 3**: $R \cong S/(x_1x_3^2 - x_2^3 - x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2)$ y el orden (parcial) monomial definido por $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3} \leq x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \leq_{\text{lex}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ junto con el orden $\leq_{\text{lex}}$ funcionan como un vector de peso $w \in \mathbb{R}$ y el orden $<$ en $\mathbb{R}$. Los monomios obtienen *multipesos* al multiplicar su vector exponente con la matriz, e.g.:

$$\begin{array}{ccccccccc} (3,6) & = & (3,6) & \geq_{\text{lex}} & (3,4) & \geq_{\text{lex}} & (3,2) \\ x_1x_3^2 & - & x_2^3 & + & 2x_1x_2^2 & - & x_1^2x_2 \end{array}$$

Matrices de pesos y la región de Gröbner

Sea $S = k[x_1, \dots, x_n]$ y $I \subset S$ un ideal. Una matriz $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ se llama una *matriz de pesos* y junto con el grupo ordenado $(\mathbb{Q}^d, \prec)$ definimos para $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} x^\alpha c_\alpha$

$$\mathrm{in}_{(M,\prec)}(f) = \sum_{\substack{\beta: M\beta \succeq M\alpha\\ \forall \alpha: c_\alpha \neq 0}} x^\beta c_\beta .$$

De manera similar definimos $\mathrm{in}_{(M,\prec)}(I) = (\mathrm{in}_{(M,\prec)}(f) : f \in I)$. Si del contexto $(\mathbb{Q}^d, \prec)$ esta claro escribimos $\mathrm{in}_M(I)$.

Matrices de pesos y la región de Gröbner

Sea $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ y $I \subset S$ un ideal. Una matriz $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ se llama una *matriz de pesos* y junto con el grupo ordenado $(\mathbb{Q}^d, \prec)$ definimos para $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} x^\alpha c_\alpha$

$$\mathrm{in}_{(M,\prec)}(f) = \sum_{\substack{\beta: M\beta \succeq M\alpha \\ \forall \alpha: c_\alpha \neq 0}} x^\beta c_\beta.$$

De manera similar definimos $\mathrm{in}_{(M,\prec)}(I) = (\mathrm{in}_{(M,\prec)}(f) : f \in I)$. Si del contexto $(\mathbb{Q}^d, \prec)$ esta claro escribimos $\mathrm{in}_M(I)$.

Definimos en $\mathbb{Q}^{d\times n}$ la *región de Gröbner de rango d*

$$\mathrm{GR}^d(I) := \left\{ M \in \mathbb{Q}^{d\times n} : \exists < \text{ orden monomial, } \mathrm{in}_<(I) = \mathrm{in}_<(\mathrm{in}_M(I)) \right\}$$

Ejemplo

Ejercicio 1

Sea $I = (x^2y - xy + yz^2 + z^2) \subset k[x, y, z]$. *Fijamos el orden lexicográfico en* $\mathbb{Q}^2$. *Calcula los ideales iniciales con respecto a las siguientes matrices. ¿Están en la región de Gröbner* $\mathrm{GR}^2(I)$*?*

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Recuerda: si $\prec$ *es un orden monomial en* S *y* x^v, x^u *dos monomios tal que* x^v *divide* x^u*, entonces ...*

La región de Gröbner y conos de Gröbner

Tarea 1 (Lema 8.7, KM19)

Sea $I \subset S$ un ideal.

1. *Muestra que la región de Gröbner* $\mathrm{GR}^d(I)$ *contiene el ortante positivo* $\mathbb{Q}_{\geq 0}^{d\times n}$.
2. *Si I es homogéneo* $\mathrm{GR}^d(I) = \mathbb{Q}^{d\times n}$.

La región de Gröbner y conos de Gröbner

Tarea 1 (Lema 8.7, KM19)

Sea $I \subset S$ un ideal.

1. *Muestra que la región de Gröbner $\mathrm{GR}^d(I)$ contiene el ortante positivo $\mathbb{Q}_{\geq 0}^{d\times n}$.*
2. *Si I es homogéneo $\mathrm{GR}^d(I) = \mathbb{Q}^{d\times n}$.*

Como en el caso de rango uno definimos los conos abiertos asociados a matrices de pesos: para $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$

$$C^d[M] := C_I^d[M] := \{M' \in \mathbb{Q}^{d\times n} : \mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_{M'}(I)\}.$$

La utilidad de la base de Gröbner reducida

Recuerda la base de Gröbner reducido $\mathcal{G}_< := \mathcal{G}_<(I)$ de I con respecto al orden monomial $<$ en S.

Lema (Lema 8.5 y 6, KM19)

Sea $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ y $<$ un orden monomial.

1. $M \in C^d[<]$ *si y solo si* $\mathrm{in}_<(\mathrm{in}_M(g)) = \mathrm{in}_<(g)$ *para cada* $g \in \mathcal{G}_<$. *En particular,* $C^d[<]$ *es un cono poliedral y* $\mathrm{GR}^d(I)$ *tiene la estructura de un abanico.*

La utilidad de la base de Gröbner reducida

Recuerda la base de Gröbner reducido $\mathcal{G}_< := \mathcal{G}_<(I)$ de I con respecto al orden monomial $<$ en S.

Lema (Lema 8.5 y 6, KM19)

Sea $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ y $<$ un orden monomial.

1. *$M \in C^d[<]$ si y solo si $\mathrm{in}_<(\mathrm{in}_M(g)) = \mathrm{in}_<(g)$ para cada $g \in \mathcal{G}_<$. En particular, $C^d[<]$ es un cono poliedral y $\mathrm{GR}^d(I)$ tiene la estructura de un abanico.*
2. $\mathcal{G}_<(\mathrm{in}_M(I)) = \{\mathrm{in}_M(g) : g \in \mathcal{G}_<\}$.
3. *Si $M \in C^d[<]$ entonces $M' \in C^d[M]$ si y solo si $\mathrm{in}_{M'}(g) = \mathrm{in}_M(g)$ para cada $g \in \mathcal{G}_<$.*

Conexión: de rango mayor a rango uno

Fijamos el orden lexicográfico en $\mathbb{Q}^d$.

Lema (Lema 8.8 KM19)

Sea $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ y $u_1, \dots, u_d$ sus filas. Para cada $I \subset S$ un ideal homogéneo tenemos

$$\mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_{u_d}(\dots \mathrm{in}_{u_1}(I)\dots)$$

Conexión: de rango mayor a rango uno

Fijamos el orden lexicográfico en $\mathbb{Q}^d$.

Lema (Lema 8.8 KM19)

Sea $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ y $u_1, \dots, u_d$ sus filas. Para cada $I \subset S$ un ideal homogéneo tenemos

$$\mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_{u_d}(\dots \mathrm{in}_{u_1}(I)\dots)$$

Idea de la prueba:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, entonces $M\alpha = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{di} \end{pmatrix}$. Así $M\alpha >_{\mathrm{lex}} M\beta$ si

$$\begin{array}{lclcl} \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{1i} & > & \sum_{i=1}^n \beta_i u_{1i}, & \text{o} & \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{1i} & = & \sum_{i=1}^n \beta_i u_{1i} & \text{y} & \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{2i} > \sum_{i=1}^n \beta_i u_{2i}, \quad \dots \end{array}$$

Conexión: de rango mayor a rango uno

Fijamos el orden lexicográfico en $\mathbb{Q}^d$.

Lema (Lema 8.8 KM19)

Sea $M \in \mathbb{Q}^{d\times n}$ y $u_1, \dots, u_d$ sus filas. Para cada $I \subset S$ un ideal homogéneo tenemos

$$\text{in}_M(I) = \text{in}_{u_d}(\dots \text{in}_{u_1}(I)\dots)$$

Idea de la prueba:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, entonces $M\alpha = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{di} \end{pmatrix}$. Así $M\alpha >_{\text{lex}} M\beta$ si

$$\begin{array}{lllll} \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{1i} & > & \sum_{i=1}^n \beta_i u_{1i}, & \text{o} & \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{1i} & = & \sum_{i=1}^n \beta_i u_{1i} & \text{y} & \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{2i} > \sum_{i=1}^n \beta_i u_{2i}, \quad \dots \end{array}$$

En particular, para cada $f \in I$ tenemos $\text{in}_M(f) = \text{in}_{u_d}(\dots \text{in}_{u_1}(f)\dots)$ por lo tanto $\text{in}_M(I) \subseteq \text{in}_{u_d}(\dots \text{in}_{u_1}(I)\dots)$. Para la otra inclusión se utiliza la inducción por d. $\square$

Ejemplo

Ejercicio 2

Sea $I = (x^2y - xy + yz^2 + z^2) \subset k[x, y, z]$. *Fijamos el orden lexicográfico en* $\mathbb{Q}^2$. *Calcula los ideales iniciales*

$$\mathrm{in}_{u_2}(\mathrm{in}_{u_1}(I))$$

donde u_1, u_2 *son las filas de las siguientes matrices:*

1. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Tarea 2

Sea $I \subset S$ un ideal y $M \in \mathrm{GR}^d(I)$.

1. *Muestra que existe un $w \in \mathbb{Q}^n$ tal que*

$$\mathrm{in}_u(I) = \mathrm{in}_M(I)$$

   Recuerda el Lema 8 de Anderson (p.8 del 12 de octubre).

2. *Supongamos que las filas de M son linealmente independientes y que pertenecen al mismo cono $C \in GF(I)$ del abanico de Gröbner (de rango uno) de I. Sea u la suma de las filas de M entonces*

$$\mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_u(I)$$

   Recuerda que para cada $u, v \in \mathbb{R}^n$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $\mathrm{in}_u(\mathrm{in}_v(I)) = \mathrm{in}_{v+\epsilon u}(I)$.

La tropicalización de rango mayor

Dado $I \subset S$ recuerda su tropicalización

$$\mathrm{Trop}(I) := \{w \in \mathrm{GR}(I) : \mathrm{in}_w(I) \not\ni \text{monomios}\}.$$

Fijamos el orden lexicográfico en $\mathbb{Q}^d$ y definimos su análogo de rango mayor

$$\mathrm{Trop}^d(I) := \{M \in \mathrm{GR}^d(I) : \mathrm{in}_M(I) \not\ni \text{monomios}\}.$$

La tropicalización de rango mayor

Dado $I \subset S$ recuerda su tropicalización

$$\mathrm{Trop}(I) := \{w \in \mathrm{GR}(I) : \mathrm{in}_w(I) \not\ni \text{monomios}\}.$$

Fijamos el orden lexicográfico en $\mathbb{Q}^d$ y definimos su análogo de rango mayor

$$\mathrm{Trop}^d(I) := \{M \in \mathrm{GR}^d(I) : \mathrm{in}_M(I) \not\ni \text{monomios}\}.$$

Proposición (Proposición 8.16, KM19)

Sea $I \subset S$ un ideal y $M \in \mathrm{GR}^d(I)$ con filas $u_1, \ldots, u_d$. Entonces, $M \in \mathrm{Trop}^d(I)$ si y solo si $u_1 \in \mathrm{Trop}(I)$ y

$$u_i \in \mathrm{Trop}(\mathrm{in}_{u_{i-1}}(\ldots \mathrm{in}_{u_1}(I)\ldots)) \quad \textit{para todas } 1 < i \leq d$$

Prueba de la Proposición 8.16

Sabemos del **Lema 8.8** que

$$\mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_{u_d}(\ldots \mathrm{in}_{u_1}(I)\ldots)$$

Entonces, $\mathrm{in}_M(I)$ no contiene monomios si y solo si $\mathrm{in}_{u_d}(\ldots \mathrm{in}_{u_1}(I)\ldots)$ no contiene monomios

Prueba de la Proposición 8.16

Sabemos del **Lema 8.8** que

$$\mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_{u_d}(\dots \mathrm{in}_{u_1}(I)\dots)$$

Entonces, $\mathrm{in}_M(I)$ no contiene monomios si y solo si $\mathrm{in}_{u_d}(\dots \mathrm{in}_{u_1}(I)\dots)$ no contiene monomiossi y solo si

$$\mathrm{in}_{u_1}(I) \not\ni \text{monomios, y } \; \mathrm{in}_{u_2}(\mathrm{in}_{u_1}(I)) \not\ni \text{monomios, y } \; \dots$$

Lo cual es equivalente a $u_1 \in \mathrm{Trop}(I)$ y $u_2 \in \mathrm{Trop}(\mathrm{in}_{u_1}(I))$ y los demás

$$u_i \in \mathrm{Trop}(\mathrm{in}_{u_{i-1}}(\dots \mathrm{in}_{u_1}(I)\dots)) \quad \text{para todas } 1 < i \leq d$$

■

Ejemplos de la Proposición 8.16

Para un ideal (homogéneo) $I \subset S$ consideramos $\tau \in \text{Trop}(I)$ un cono de dimensión d y $\{u_1, \ldots, u_d\} \subset \tau^\circ$. Definimos M cuyas filas son $u_1, \ldots, u_d$. Entonces,

$$\text{in}_{u_1}(I) = \cdots = \text{in}_{u_d}(I) = \text{in}_M(I)$$

y $M \in \text{Trop}^d(I)$.

Ejemplos de la Proposición 8.16

Sea $\tau \in \mathrm{Trop}(I)$ de dimensión d, y escogemos una bandera de caras

$$\tau_1 \subset \tau_2 \subset \cdots \subset \tau_{d-1} \subset \tau$$

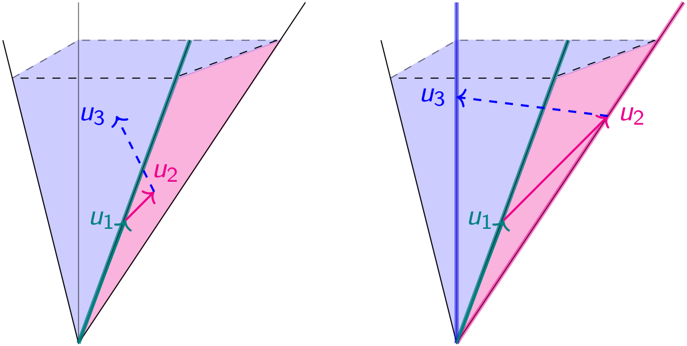
de τ con $\dim \tau_i = i$. Escogemos $u_1 \in \tau_1$, y para cada $2 \leq i \leq d$ tomamos $u_i \in \tau_i$ tal que $\{u_1, \ldots, u_i\} \subset \tau_i$ es linealmente independiente.
Nota que

1. $u_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{in}_{u_1}(I))$ y $u_2 \in \mathrm{Trop}(\mathrm{in}_{u_1}(I))$,
2. $u_{i-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{in}_{u_{i-1}}(\ldots \mathrm{in}_{u_1}(I)\ldots))$ y $u_i \in \mathrm{Trop}(\mathrm{in}_{u_{i-1}}(\ldots \mathrm{in}_{u_1}(I)\ldots))$ para cada $1 < i \leq d$.

Por lo tanto $M \in \mathrm{Trop}^d(I)$, más precisamente

$$\mathrm{in}_M(I) = \mathrm{in}_\tau(I) = \mathrm{in}_{u_1+\cdots+u_d}(I).$$

Ejemplos de la Proposición 8.16



$\tau \supset \tau_2 \supset \tau_1$

Bibliografia

- Anderson, D. *Okounkov bodies and toric degenerations*, Math. Ann. (2013) 356:1183–1202 `https://arxiv.org/abs/1001.4566`
- Kaveh, K. y Manon, C. *Khovanskii Bases, Higher Rank Valuations, and Tropical Geometry.* SIAM J. Appl. Algebra Geometry (2019) Vol. 3, No. 2, pp. 292-336, `https://arxiv.org/abs/1610.00298`
- Maclagan, D. y Sturmfels, B. *Introduction to Tropical Geometry.* Grad. Stud. Math. 161, AMS, Providence, RI, 2015.
- Sturmfels, B. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. Univ. Lecture Ser. 8, AMS, Providence, RI, 1996.