Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Octubre 5 2022

Contenido

Grupos abelianos ordenados

Sea k un campo y $k \subset K$ una extensión de campos con grado de transcendencia finito (por ejemplo, K es un campo de funciones racionales sobre k)

Un *grupo abeliano ordenado* es un grupo abeliano $(\Gamma, +)$ con un orden total $\prec$ tal que para $a, b, c \in \Gamma$

$$a \prec b \quad \Rightarrow \quad a + c \prec b + c$$

Nota: cada orden monomial en S corresponde a un orden total $\prec$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $(\mathbb{Z}^d, \prec)$ es un grupo abeliano ordenado. Por ejemplo $\prec$ puede ser el orden lexicográfico.

Valuaciones

Fijamos un orden $\prec$ en $\mathbb{Z}^d$ tal que $(\mathbb{Z}^d, \prec)$ es un grupo abeliano ordenado.

Una $\mathbb{Z}^d$-valuación en K es una aplicación $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ que satisface para todas $f, g \in K \setminus \{0\}$

1. $\nu(f+g) \geq \min_{\prec}\{\nu(f), \nu(g)\}$;
2. $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$

Ejercicio 1

Muestra que cada $\mathbb{Z}^d$-valuación $\nu : K \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^d, \prec)$ cumple para $f, g \in K \setminus \{0\}$

$$\nu(f+g) > \min_{\prec}\{\nu(f), \nu(g)\} \quad \Leftarrow \quad \nu(f) = \nu(g).$$

Anillos graduados y cuerpos de Newton–Okounkov

Dado una $\mathbb{Z}^d$-valuación en K y $V \subset K$ un k-especia vectorial de dimensión finita. Sea $V^m := \langle f_1 \cdots f_m : f_i \in V \rangle \subset K$, definimos *anillo graduado de V*

$$R(V) := \bigoplus_{m \geq 0} V^m$$

Anillos graduados y cuerpos de Newton–Okounkov

Dado una $\mathbb{Z}^d$-valuación en K y $V \subset K$ un k-especia vectorial de dimensión finita. Sea $V^m := \langle f_1 \cdots f_m : f_i \in V \rangle \subset K$, definimos *anillo graduado de V*

$$R(V) := \bigoplus_{m \geq 0} V^m$$

Asociamos los siguientes objetos:

1. El *semigrupo graduado* es

$$\Gamma(V) := \Gamma_\nu(V) := \{(m, \nu(f)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : f \in V^m \setminus \{0\}\};$$

Anillos graduados y cuerpos de Newton–Okounkov

Dado una $\mathbb{Z}^d$-valuación en K y $V \subset K$ un k-especia vectorial de dimensión finita. Sea $V^m := \langle f_1 \cdots f_m : f_i \in V \rangle \subset K$, definimos *anillo graduado de V*

$$R(V) := \bigoplus_{m \geq 0} V^m$$

Asociamos los siguientes objetos:

1. El *semigrupo graduado* es

$$\Gamma(V) := \Gamma_\nu(V) := \{(m, \nu(f)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : f \in V^m \setminus \{0\}\};$$

2. El *Cono de Newton–Okounkov* es

$$\text{Cono}(V) := \overline{\text{Cono}(\Gamma(V))} := \overline{\text{Conv}(\Gamma(V))} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

Anillos graduados y cuerpos de Newton–Okounkov

Dado una $\mathbb{Z}^d$-valuación en K y $V \subset K$ un k-especia vectorial de dimensión finita. Sea $V^m := \langle f_1 \cdots f_m : f_i \in V \rangle \subset K$, definimos *anillo graduado de V*

$$R(V) := \bigoplus_{m \geq 0} V^m$$

Asociamos los siguientes objetos:

1. El *semigrupo graduado* es

$$\Gamma(V) := \Gamma_\nu(V) := \{(m, \nu(f)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : f \in V^m \setminus \{0\}\};$$

2. El *Cono de Newton–Okounkov* es

$$\mathrm{Cono}(V) := \overline{\mathrm{Cono}(\Gamma(V))} := \overline{\mathrm{Conv}(\Gamma(V))} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

3. El Cuerpo de Newton–Okounkov es

$$\Delta(V) := \Delta_\nu(V) := \mathrm{Cono}(V) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^d)$$

Valuación extendida

Sea $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación y $V \subset K$. Podemos extender la valuación a

$$\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, \quad \hat{\nu}(f) = (m, \nu(f_m))$$

donde $f = \sum_{i \geq 0} c_i f_i \in R(V)$, $f_i \in V^i$ y $m = \max\{i : c_i \neq 0\}$.

El orden inducido en $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ es definido por

$$(m_1, u_1) \preceq (m_2, u_2) \quad \Leftrightarrow \quad m_1 < m_2, \quad \text{o} \quad m_1 = m_2 \text{ y } u_1 \succeq u_2$$ [1]

Nota: El imagen de $\hat{\nu}$ es $\Gamma_\nu(V)$.

[1] *¡El cambio es a propósito!*

Ejemplo

Sea $K = k(x_1, x_2)$. Definimos una $\mathbb{Z}$-valuación con respecto al orden

$$a \prec b \quad \text{sii} \quad a > b.$$

Definimos $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ para monomios $x_1^a x_2^b \mapsto b$, para polinomios $f \mapsto \deg_{x_2}(f)$ y para funciones racionales $f/g \mapsto \nu(f) - \nu(g)$.

Ejemplo

Sea $K = k(x_1, x_2)$. Definimos una $\mathbb{Z}$-valuación con respecto al orden

$$a \prec b \quad \text{sii} \quad a > b.$$

Definimos $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ para monomios $x_1^a x_2^b \mapsto b$, para polinomios $f \mapsto \deg_{x_2}(f)$ y para funciones racionales $f/g \mapsto \nu(f) - \nu(g)$.

Ejercicio 2

Sea $V = \langle x_1, x_1x_2, x_1x_2^3 \rangle \subset K$ *y su anillo graduado* $R(V) = \bigoplus_{m \geq 0} V^m \subset K$.

Calcula el semigrupo graduado $\Gamma(V)$*, al cono de Newton–Okounkov* $\mathrm{Cono}(V)$ *y el cuerpo de Newton–Okounkov* $\Delta(V)$ *de* V*.*

Ejemplo

Sea $K = k(x_1, x_2)$. Definimos una $\mathbb{Z}$-valuación con respecto al orden

$$a \prec b \quad \text{sii} \quad a > b.$$

Definimos $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ para monomios $x_1^a x_2^b \mapsto b$, para polinomios $f \mapsto \deg_{x_2}(f)$ y para funciones racionales $f/g \mapsto \nu(f) - \nu(g)$.

Ejercicio 2

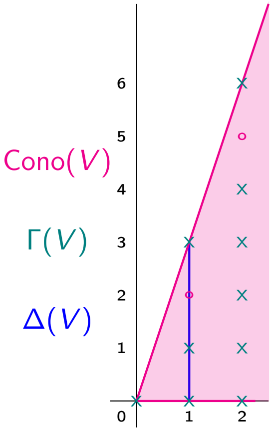
Sea $V = \langle x_1, x_1x_2, x_1x_2^3 \rangle \subset K$ *y su anillo graduado* $R(V) = \bigoplus_{m \geq 0} V^m \subset K$.

Calcula el semigrupo graduado $\Gamma(V)$, *al cono de Newton–Okounkov* $\mathrm{Cono}(V)$ *y el cuerpo de Newton–Okounkov* $\Delta(V)$ *de* V.

$$\begin{aligned}
\Gamma(V) &:= \Gamma_\nu(V) := \{(m, \nu(f)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : f \in V^m \setminus \{0\}\} \\
\mathrm{Cono}(V) &:= \mathrm{Cono}(\Gamma(V)) := \overline{\mathrm{Conv}(\Gamma(V))} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\
\Delta(V) &:= \Delta_\nu(V) := \mathrm{Cono}(V) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^d)
\end{aligned}$$

Ejemplo

Tenemos $\nu : k(x_1, x_2) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ para monomios $x_1^a x_2^b \mapsto b$ y $V = \langle x_1, x_1x_2, x_1x_2^3 \rangle \subset K$ y su anillo graduado $R(V) = \bigoplus_{m \geq 0} V^m \subset K$.



Ejemplo patológico

Sea $V = \langle tx, t^2x, (1+t^4)x \rangle \subset k(t,x)$ con la graduación $\deg(f(t)x^a) = a$. Definimos la valuación extendida

$$\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \hat{\nu}(f(t)x^a) = (a, \deg(f(t))$$

Ejemplo patológico

Sea $V = \langle tx, t^2x, (1+t^4)x \rangle \subset k(t,x)$ con la graduación $\deg(f(t)x^a) = a$. Definimos la valuación extendida

$$\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \hat{\nu}(f(t)x^a) = (a, \deg(f(t))$$

Tarea 1

Muestra (por inducción) que es espacio V^k tiene k-base

$$t^2x^k, t^3x^k, \ldots, t^{4k-4}x^k, (t+t^{4k-3})x^k, t^{4k-2}x^k, (1+t^{4k})x^k.$$

Ejemplo patológico

Por lo tanto, el semigrupo $\Gamma(V)$ es generado por

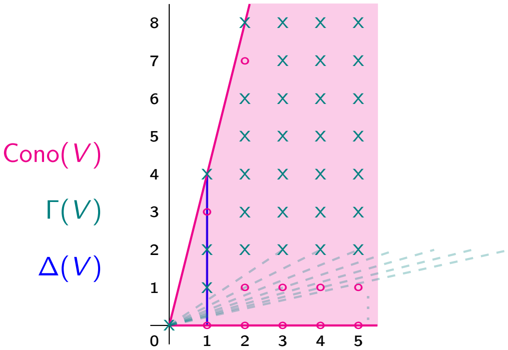
$$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,k) : k \geq 2\}.$$

Ejemplo patológico

Por lo tanto, el semigrupo $\Gamma(V)$ es generado por

$$\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,k) : k \geq 2\}.$$

Entonces, no es finitamente generado, su envolvente convexa no es cerrada.



Motivación geométrica

Sea X una variedad proyectiva de dimensión d. Una *bandera de subvariedades (admisible) de X* es una bandera

$$Y_\bullet = (X = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_{d-1} \supset Y_d)$$

donde Y_r es una subvariedad de codimensión r en X que es suave en el punto Y_d.

Motivación geométrica

Sea X una variedad proyectiva de dimensión d. Una *bandera de subvariedades (admisible) de X* es una bandera

$$Y_\bullet = (X = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_{d-1} \supset Y_d)$$

donde Y_r es una subvariedad de codimensión r en X que es suave en el punto Y_d.

Sea $\mathcal{L}$ un haz lineal en X y $V \subseteq H^0(X, \mathcal{L})$ un subespacio de dimensión positiva. Para $m \geq 0$ sea V^m el imagen de

$$\mathrm{Sym}^m V \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m}).$$

Así $R(V)$ es un subanillo del anillo de secciones $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$.

Motivación geométrica

Definimos la valuación $\nu_{Y_\bullet} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ de manera recursiva: para $f \in V^m$ sea

$$\nu_1 = \nu_1(f) = \mathrm{ord}_{Y_1}(f).$$

Motivación geométrica

Definimos la valuación $\nu_{Y_\bullet} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ de manera recursiva: para $f \in V^m$ sea

$$\nu_1 = \nu_1(f) = \mathrm{ord}_{Y_1}(f).$$

Sea y_1 una ecuación local de Y_1 entonces $f \cdot y_1^{-\nu_1}$ se puede ver como una función racional no cero en Y_1. Consideramos la restricción $f_1 = f \cdot y_1^{-\nu_1}|_{Y_1}$ y definimos

$$\nu_2 = \nu_2(f) = \mathrm{ord}_{Y_2}(f_1).$$

Motivación geométrica

Definimos la valuación $\nu_{Y_\bullet} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ de manera recursiva: para $f \in V^m$ sea

$$\nu_1 = \nu_1(f) = \mathrm{ord}_{Y_1}(f).$$

Sea y_1 una ecuación local de Y_1 entonces $f \cdot y_1^{-\nu_1}$ se puede ver como una función racional no cero en Y_1. Consideramos la restricción $f_1 = f \cdot y_1^{-\nu_1}|_{Y_1}$ y definimos

$$\nu_2 = \nu_2(f) = \mathrm{ord}_{Y_2}(f_1).$$

Continuamos de la misma manera y definimos $\nu_{Y_\bullet}(f) := (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d)$

Motivación geométrica

Definimos la valuación $\nu_{Y_\bullet} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ de manera recursiva: para $f \in V^m$ sea

$$\nu_1 = \nu_1(f) = \mathrm{ord}_{Y_1}(f).$$

Sea y_1 una ecuación local de Y_1 entonces $f \cdot y_1^{-\nu_1}$ se puede ver como una función racional no cero en Y_1. Consideramos la restricción $f_1 = f \cdot y_1^{-\nu_1}|_{Y_1}$ y definimos

$$\nu_2 = \nu_2(f) = \mathrm{ord}_{Y_2}(f_1).$$

Continuamos de la misma manera y definimos $\nu_{Y_\bullet}(f) := (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d)$

Ejemplo

Sea X una curva irreducible sobre k y $k(X)$ su campo de funciones racionales. Un punto suave $a \in X$ es una bandera de subvariedades en X y la valuación es

$$\nu : k(X) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto ord_a(f)$$

Comentarios

1. Los semigrupos $\Gamma(V)$ no necesariamente son finitamente generados.
2. La cerradura en la definición del cono de Newton–Okounkov es necesaria.
3. Los cuerpos de Newton–Okounkov son convexos (por definición), pero no necesariamente acotados. Por ejemplo, [Ian Carvey, arxiv2203.02843] calcula el cuerpo de Newton–Okounkov del esquema de Hilbert de puntos en $\mathbb{C}^2$ que no es acotado.
4. En dimensión 2, todos los cuerpos de Newton–Okounkov son poliedrales [Theorem B, KLM12].
5. En general, los cuerpos de Newton–Okounkov no necesarimante son poliedrales. En [KLM12] se contruyen dos ejemplos (una variedad Fano con haz lineal amplio, y otro para un Mori dream space)

Bibliografia

- Anderson, D. *Okounkov bodies and toric degnerations*, Math. Ann. (2013) 356:1183–1202
- Cavey, I. *Effective Divisors and Newton-Okounkov Bodies of Hilbert Schemes of Points on Toric Surfaces*, arxiv:2203.02843
- Ilten, N. y Wrobel, M. *Khovanskii-finite valuations, rational curves, and torus actions*, J. Comb. Algebra. 4 (2020), 141–166
- Küronya, A. y Lozovanu, V. y and Maclean, C. *Convex bodies appearing as Okounkov bodies of divisors*. Adv. Math., 229(5):26222639, 2012.