Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Septiembre 13 2022

Contenido

Orden monomial y vector de peso

Sea $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ y $<$ un orden monomial para *romper empates*. Definimos el orden monomial $<_w$:

$$x^a <_w x^b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) < 0, & \text{o} \\ \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) = 0 & \text{y } x^a < x^b. \end{cases}$$

Orden monomial y vector de peso

Sea $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ y $<$ un orden monomial para *romper empates*. Definimos el orden monomial $<_w$:

$$x^a <_w x^b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) < 0, & \text{o} \\ \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) = 0 & \text{y } x^a < x^b. \end{cases}$$

Corolario

Sea $w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ y $I \subset S$ un ideal.

1. *Si G es una base de Gröbner para I con respeto a $<_w$, entonces $\{in_w(g) : g \in G\}$ es una base de Gröbner para $in_w(I)$ con respeto a $<$.*
2. *Si $in_w(I)$ es un ideal monomial, entonces $in_w(I) = in_{<_w}(I)$.*

Ejercicio

Ejercicio 1

Sea $I = (x_1x_2 - 1, x_1^2 - x_2) \subset K[x_1, x_2]$ *y* $< \in \{<_{lex}, <_{revlex}\}$.

1. *Calcula una* $<$*-base de Gröbner de* I.
2. *Define un vector* $w \in \mathbb{N}^2$ *tal que* $\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_<(I)$.

Recuerda,

$$S(f,g) = \frac{\mathrm{mcm}(\mathrm{in}_<(f), \mathrm{in}_<(g))}{\mathrm{in}_<(f)} f - \frac{\mathrm{mcm}(\mathrm{in}_<(f), \mathrm{in}_<(g))}{\mathrm{in}_<(g)} g$$

Orden monomial y vector de peso

Lema (Lema 3.1.1, HH)

Dado un orden monomial $<$ en S y un número finito de pares de monomios $(\mathrm{x}^{a_1}, \mathrm{x}^{b_1}), \ldots, (\mathrm{x}^{a_m}, \mathrm{x}^{b_m})$ tal que $\mathrm{x}^{a_i} > \mathrm{x}^{b_i}$ para todas $i \in [m]$, existe un vector de peso $w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $\langle a_i, w \rangle > \langle b_i, w \rangle$ para todas $i \in [m]$.

Prueba: Usa el Lema de Farkas.

Orden monomial y vector de peso

Lema (Lema 3.1.1, HH)

Dado un orden monomial $<$ en S y un número finito de pares de monomios $(\mathrm{x}^{a_1}, \mathrm{x}^{b_1}), \ldots, (\mathrm{x}^{a_m}, \mathrm{x}^{b_m})$ tal que $\mathrm{x}^{a_i} > \mathrm{x}^{b_i}$ para todas $i \in [m]$, existe un vector de peso $w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $\langle a_i, w \rangle > \langle b_i, w \rangle$ para todas $i \in [m]$.

Prueba: Usa el Lema de Farkas.

Teorema (Teorema 3.1.2, HH)

Sea $I \subset S$ un ideal y $<$ un orden monomial en S. Entonces existe $w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $\mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_<(I)$.

Prueba del Teorema 3.1.2

Sea $g_1, \ldots, g_s$ una $<$-base de Gröbner de I. Consideramos todos los pares $(\mathrm{in}_<(g_i), u)$ donde $u \in \mathrm{supp}(g_i) \setminus \{\mathrm{in}_<(g_i)\}$. Nota que es un número finito de pares, por lo tanto **Lema 3.1.1** implica que existe $w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $\mathrm{in}_w(g_i) = c_i\,\mathrm{in}_<(g_i)$ para todas $i \in [s]$ donde c_i es el coeficiente principal de g_i con respecto a $<$.

Prueba del Teorema 3.1.2

Sea $g_1, \ldots, g_s$ una $<$-base de Gröbner de I. Consideramos todos los pares $(\mathrm{in}_<(g_i), u)$ donde $u \in \mathrm{supp}(g_i) \setminus \{\mathrm{in}_<(g_i)\}$. Nota que es un número finito de pares, por lo tanto **Lema 3.1.1** implica que existe $w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $\mathrm{in}_w(g_i) = c_i \, \mathrm{in}_<(g_i)$ para todas $i \in [s]$ donde c_i es el coeficiente principal de g_i con respecto a $<$. Entonces,

$$\mathrm{in}_<(I) = (\mathrm{in}_<(g_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_s)) \subset \mathrm{in}_w(I).$$

Así obtenemos

$$\mathrm{in}_<(I) = \mathrm{in}_<(\mathrm{in}_<(I)) \subset \mathrm{in}_<(\mathrm{in}_w(I)) = \mathrm{in}_{<_w}(I),$$

donde $<_w$ es el orden monomial obtenido de refinar w con $<$.

Prueba del Teorema 3.1.2

Sea $g_1, \ldots, g_s$ una $<$-base de Gröbner de I. Consideramos todos los pares $(\mathrm{in}_<(g_i), u)$ donde $u \in \mathrm{supp}(g_i) \setminus \{\mathrm{in}_<(g_i)\}$. Nota que es un número finito de pares, por lo tanto **Lema 3.1.1** implica que existe $w \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que $\mathrm{in}_w(g_i) = c_i \,\mathrm{in}_<(g_i)$ para todas $i \in [s]$ donde c_i es el coeficiente principal de g_i con respecto a $<$. Entonces,

$$\mathrm{in}_<(I) = (\mathrm{in}_<(g_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_s)) \subset \mathrm{in}_w(I).$$

Así obtenemos

$$\mathrm{in}_<(I) = \mathrm{in}_<(\mathrm{in}_<(I)) \subset \mathrm{in}_<(\mathrm{in}_w(I)) = \mathrm{in}_{<_w}(I),$$

donde $<_w$ es el orden monomial obtenido de refinar w con $<$. El **Corolario 6.1.5** implica $\mathcal{H}(S/\mathrm{in}_<(I)) = \mathcal{H}(S/\mathrm{in}_{<_w}(I))$, por lo tanto, tenemos $\mathrm{in}_{<_w}(I) = \mathrm{in}_<(I)$ (**Prueba del Corolario 6.1.6**). ■

Homogenización

Dado $f = \sum_{i=1}^{s} c_i x^{a_i} \in S$ y $w \in \mathbb{N}^n$ recuerda el *w-grado de f* $\deg_w(f) = \max\{\langle a_i, w\rangle : c_i \neq 0\}$.

Definimos un polinomio en $S[t]$ que se llama la *w-homogenización de f*

$$f^w := \sum_{i=1}^{s} c_i x^{a_i} t^{\deg_w(f) - \langle a_i, w\rangle} \in S[t].$$

Para un ideal $I \subset S$ la *w-homogenización de I* es $I^w := (f^w : f \in I)$.

Homogenización

Dado $f = \sum_{i=1}^{s} c_i x^{a_i} \in S$ y $w \in \mathbb{N}^n$ recuerda el w-grado de f $\deg_w(f) = \max\{\langle a_i, w\rangle : c_i \neq 0\}$.

Definimos un polinomio en $S[t]$ que se llama la w-homogenización de f

$$f^w := \sum_{i=1}^{s} c_i x^{a_i} t^{\deg_w(f) - \langle a_i, w\rangle} \in S[t].$$

Para un ideal $I \subset S$ la w-homogenización de I es $I^w := (f^w : f \in I)$.

Ejercicio 2

Dado el ideal $I = (x_1x_2 - 1, x_1^2 - x_2) \subset K[x_1, x_2]$ calcula la

1. $(3,1)$-*homogenización de los elementos de la $<_{lex}$-base de Gröbner $\{x_1x_2 - 1, x_1^2 - x_2, x_2^2 - x_1\}$;*
2. $(1,3)$-*homogenización de los elementos de la $<_{revlex}$-base de Gröbner $\{x_1x_2 - 1, x_1^2 - x_2, x_1^3 - 1\}$.*

Homogenización

Lema

Dado $I \subset S$ un ideal y $w \in \mathbb{N}^n$ tenemos

1. $(fg)^w = f^w g^w$ *para todos* $f, g \in S$.
2. $f^w \in S[t]$ *es homogéneo con respecta a la graduación* $(w_1, \ldots, w_n, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Homogenización

Lema

Dado $I \subset S$ un ideal y $w \in \mathbb{N}^n$ tenemos

1. $(fg)^w = f^w g^w$ *para todos* $f, g \in S$.
2. $f^w \in S[t]$ *es homogéneo con respecta a la graduación* $(w_1, \ldots, w_n, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

Tarea 1 (Lema 3.2.1, HH)

Si $f \in S[t]$ *es homogéneo, entonces* $f \in I$ *si y solo si existen* $g \in I, m \in \mathbb{N}$ *tal que* $f = t^m g^w$.

Homogenización

Dado $w \in \mathbb{N}^n$ un orden monomial en S es *w-graduado* si $\deg_w(x^a) < \deg_w(x^b)$ implica $x^a < x^b$.

Nota: El orden $<_{\text{deglex}}$ y $<_{\text{degrevlex}}$ son $(1, \ldots, 1)$-graduados. Para cada orden monomial $<$ el orden $<_w$ es w-graduado.

Homogenización

Dado $w \in \mathbb{N}^n$ un orden monomial en S es *w-graduado* si $\deg_w(x^a) < \deg_w(x^b)$ implica $x^a < x^b$.

Nota: El orden $<_{\text{deglex}}$ y $<_{\text{degrevlex}}$ son $(1, \ldots, 1)$-graduados.
Para cada orden monomial $<$ el orden $<_w$ es w-graduado.

Un orden w-graduado induce un orden $<^w$ en $S[t]$:

$$x^a t^c <^w x^b t^d \quad \Leftrightarrow \quad x^a < x^b, \text{ o } x^a = x^b \text{ y } c < d.$$

Homogenización

Dado $w \in \mathbb{N}^n$ un orden monomial en S es *w-graduado* si $\deg_w(x^a) < \deg_w(x^b)$ implica $x^a < x^b$.

Nota: El orden $<_{\text{deglex}}$ y $<_{\text{degrevlex}}$ son $(1, \ldots, 1)$-graduados. Para cada orden monomial $<$ el orden $<_w$ es w-graduado.

Un orden w-graduado induce un orden $<^w$ en $S[t]$:

$$x^a t^c <^w x^b t^d \quad \Leftrightarrow \quad x^a < x^b, \text{ o } x^a = x^b \text{ y } c < d.$$

Proposición 1 (Proposición 3.2.2, HH)

Sea $I \subset S$ un ideal y $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una base de Gröbner de I con respecto a un orden monomial $<$ graduado con respecto a $w \in \mathbb{N}^n$.

Entonces, $G^w = \{g_1^w, \ldots, g_s^w\}$ es una $<^w$-base de Gröbner de I^w.

Prueba de la Proposición 3.2.2

Como I^w es homogéneo es suficiente mostrar para un $f \in I^w$ homogéneo que $\mathrm{in}_{<^w}(f) \in (\mathrm{in}_{<^w}(g_1^w), \ldots, \mathrm{in}_{<'}(g_s^w))$.
Con el **Lema 3.2.1** concluimos que $f = t^m g^w$ para algún $g \in I$ y $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{in}_{<^w}(f) = \mathrm{in}_{<^w}(t^m g^w) = t^m \,\mathrm{in}_{<}(g).$$

Prueba de la Proposición 3.2.2

Como I^w es homogéneo es suficiente mostrar para un $f \in I^w$ homogéneo que $\mathrm{in}_{<^w}(f) \in (\mathrm{in}_{<^w}(g_1^w), \dots, \mathrm{in}_{<'}(g_s^w))$.
Con el **Lema 3.2.1** concluimos que $f = t^m g^w$ para algún $g \in I$ y $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{in}_{<^w}(f) = \mathrm{in}_{<^w}(t^m g^w) = t^m \,\mathrm{in}_{<}(g).$$

Como G es una $<$-base de Gröbner de I existe un monomio $u \in S$ tal que $\mathrm{in}_<(g) = u\,\mathrm{in}_<(g_i)$ para algún $i \in [s]$. Luego como $\mathrm{in}_<(g_i) = \mathrm{in}_{<^w}(g_i^w)$ concluimos

$$\mathrm{in}_{<^w}(f) = t^m u\,\mathrm{in}_{<}(g_i) = t^m u\,\mathrm{in}_{<^w}(g_i^w).$$

■

Un modulo libre

La inclusión $K[t] \subset S[t]$ induce la estructura de un $K[t]$-módulo en $S[t]$. Además, dado un ideal $I \subset S$ induce un homomorfismo de $K[t]$-módulos $K[t] \to S[t]/I^w$ para cualquier $w \in \mathbb{N}^n$.

Un modulo libre

La inclusión $K[t] \subset S[t]$ induce la estructura de un $K[t]$-módulo en $S[t]$. Además, dado un ideal $I \subset S$ induce un homomorfismo de $K[t]$-módulos $K[t] \to S[t]/I^w$ para cualquier $w \in \mathbb{N}^n$.

Proposición 2 (Proposición 3.2.4, HH)

El cociente $S[t]/I^w$ es un $K[t]$-módulo libre para cada ideal $I \subset S$ y cada $w \in \mathbb{N}^n$.

En particular, con el **Lema p.12 agosto 30** concluimos que $S[t]/I^w$ es un $K[t]$-módulo plano.

Prueba de la Proposición 3.2.4

Sea $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una $<$-base de Gröbner de I por lo tanto $\{g_1^w, \ldots, g_s^w\}$ es una $<^w$-base de Gröbner de I^w. Así obtenemos una K-base para $S[t]/I^w$ de monomios estándar

$$\mathbb{B}_{<^w} = \mathrm{Mon}(S[t]) - \mathrm{Mon}((\mathrm{in}_{<^w}(g_1^w), \ldots, \mathrm{in}_{<^w}(g_s^w))S[t]).$$

En particular, los monomios en S que no pertenecen a $\mathrm{in}_{<^w}(I^w)$ forman una $K[t]$-base de $S[t]/I^w$. $\blacksquare$

Prueba de la Proposición 3.2.4

Sea $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una $<$-base de Gröbner de I por lo tanto $\{g_1^w, \ldots, g_s^w\}$ es una $<^w$-base de Gröbner de I^w. Así obtenemos una K-base para $S[t]/I^w$ de monomios estándar

$$\mathbb{B}_{<^w} = \mathrm{Mon}(S[t]) - \mathrm{Mon}((\mathrm{in}_{<^w}(g_1^w), \ldots, \mathrm{in}_{<^w}(g_s^w))S[t]).$$

En particular, los monomios en S que no pertenecen a $\mathrm{in}_{<^w}(I^w)$ forman una $K[t]$-base de $S[t]/I^w$. ■

Ejercicio 3

Para cada $a \in K$ la clase $t - a$ en $S[t]/I^w$ no es un divisor de cero.

Un morfismo plano

El homomorfismo $\pi^* : K[t] \to S[t]/I^w$ induce un morfismo
$\pi : \mathrm{Spec}(S[t]/I^w) \to \mathrm{Spec}(K[t]) = \mathbb{A}^1$.

Corolario

El morfismo $\pi : Spec(S[t]/I^w) \to Spec(K[t]) = \mathbb{A}^1$ *es plano.*

Un morfismo plano

El homomorfismo $\pi^* : K[t] \to S[t]/I^w$ induce un morfismo $\pi : \mathrm{Spec}(S[t]/I^w) \to \mathrm{Spec}(K[t]) = \mathbb{A}^1$.

Corolario

El morfismo $\pi : Spec(S[t]/I^w) \to Spec(K[t]) = \mathbb{A}^1$ es plano.

Prueba: Recuerda que π es plana si y solo si para cada $p \subset S[t]/I^w$ primo tenemos que la localización $(S[t]/I^w)_p$ es un $K[t]_{\pi^*(p)}$-módulo plano lo cual pasa si y solo si $S[t]/I^w$ es un $K[t]$-módulo plano (**Proposición 24.2.3 Vakil**). ■

Una familia plana

Corolario (Corolario 3.2.6, HH)

Para cada ideal $I \subset S$ y cada $w \in \mathbb{N}^n$ existe una familia plana con

- *fibra genérica isomorfa a S/I, y*
- *fibra especial isomorfa $S/\operatorname{in}_w(I)$.*

En particular, tenemos una degeneración de $\operatorname{Spec}(S/I)$ a $\operatorname{Spec}(S/\operatorname{in}_w(I))$ que se llama una **degeneración de Gröbner**.

Prueba del Corolario 3.2.6

La familia plana es definida por el homomorfismo $\pi^* : K[t] \to S[t]/I^w$. Por definición de la homogenización I^w tenemos para la fibra especial

$$(S[t]/I^w)/(t) \cong S/\operatorname{in}_w(I)$$

Prueba del Corolario 3.2.6

La familia plana es definida por el homomorfismo $\pi^* : K[t] \to S[t]/I^w$. Por definición de la homogenización I^w tenemos para la fibra especial

$$(S[t]/I^w)/(t) \cong S/\operatorname{in}_w(I)$$

Para la fibra genérica consideramos $a \in K^*$. Sea $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ una base de Gröbner tal que $g_1^w, \dots, g_s^w$ genera I^w. Sea $g_i = \sum_u c_u^i u$, entonces

$$g_i^w \mod (t - a) \equiv \sum_u c_u^i a^{\deg_w g_i - \deg_w u} u =: g_{i;a}$$

Prueba del Corolario 3.2.6

La familia plana es definida por el homomorfismo $\pi^* : K[t] \to S[t]/I^w$. Por definición de la homogenización I^w tenemos para la fibra especial

$$(S[t]/I^w)/(t) \cong S/\operatorname{in}_w(I)$$

Para la fibra genérica consideramos $a \in K^*$. Sea $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una base de Gröbner tal que $g_1^w, \ldots, g_s^w$ genera I^w. Sea $g_i = \sum_u c_u^i u$, entonces

$$g_i^w \mod (t-a) \equiv \sum_u c_u^i a^{\deg_w g_i - \deg_w u} u =: g_{i;a}$$

El homomprfismo $\varphi : S \to S$ definido por $\varphi(x_i) = a^{w_i} x_i$ para todas i tiene la propiedad que $\varphi(g_{i;a}) = a^{\deg_w(g_i)} g_i$. Por lo tanto

$$(S[t]/I^w)/(t-a) \cong S/I.$$

■

Referencias

1. Herzog, Jürgen; Hibi, Takayuki: Monomial ideals. Graduate Texts in Mathematics, 260. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. xvi+305 pp. ISBN: 978-0-85729-105-9
2. Bernd Sturmfels: Gröbner bases and convex polytopes, Volume 8 of American Mathematical Soc.1996