Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Septiembre 13 2022

Contenido

1. Bases de Gröbner
2. Algoritmos
3. Degeneraciones de Gröbner
4. **Abanicos de Gröbner**
    1. La región de Gröbner
    2. Conos de vectores de peso
    3. Politopos de Newton
    4. El abanico de Gröbner
    5. Politopos de estados
5. La Tropicalización

La región de Gröbner

Sea $I \subset S$ un ideal y $<$ un orden monomial en S. Recuerda que existe $w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ tal que

$$\mathrm{in}_<(I) = \mathrm{in}_w(I).$$

Definimos la **región de Gröbner de I**

$$\mathrm{GR}(I) = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : \mathrm{in}_w(I) = \mathrm{in}_{w'}(I) \text{ para algún } w' \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} \right\}$$

En particular, $\mathbb{R}^n_{\geq 0} \subset \mathrm{GR}(I)$ y $w \in \mathrm{GR}(I)$ si y solo si existe un orden monomial $<$ en S tal que $\mathrm{in}_<(\mathrm{in}_w(I)) = \mathrm{in}_<(I)$.

Ejercicio 1

Sea $I = (x_1x_2^2 - x_1^2 + x_1x_2) \subset S$. ¿Cual es su región de Gröbner? Calcula primero todos los ideales iniciales monomiales y los posibles pesos.

Conos de vectores de peso

Recuerda el ideal inicial con respeto a un vector de peso.

Definición

Sea $I \subset S$ un ideal. Dos vectores de peso $v, w \in \mathbb{R}^n$ se llaman equivalente (con respeto a I) si $in_v(I) = in_w(I)$. La clase de equivalencia de un $w \in \mathbb{R}^n$ sea $C[w]$.

Proposición 1 (Proposición 2.3 Sturmfels)

Para cada $w \in \mathbb{R}^n$ su clase de equivalencia $C[w]$ es un cono convexo poliédrico relativamente abierto en $\mathbb{R}^n$, o equivalentemente $C[w]$ es la intersección de un numero finito de semi espacios abiertos y hiperplanos.

Prueba de la Proposición 2.3 Sturmfels

Sea $<$ un orden monomial y $<_w$ el orden inducida por w y $<$. Sea $\mathcal{G}$ la base de Gröbner reducida de I con respeto a $<_w$. Definimos

$$C_{\mathcal{G}}[w] := \{v \in \mathbb{R}^n : in_v(g) = in_w(g) \ \forall \ g \in \mathcal{G}\}.$$

Tenemos que probar lo siguiente:

1. $C_{\mathcal{G}}[w]$ es una intersección finita de hiperplanos y semiespacios abiertos,
2. $C[w] \supseteq C_{\mathcal{G}}[w]$, y
3. $C[w] \subseteq C_{\mathcal{G}}[w]$.

1. Nota que $v \in C_{\mathcal{G}}[w]$ si y solo si cumple para cada $g \in \mathcal{G}$:

$$\begin{cases} v \cdot a = v \cdot b & \forall \ x^a, x^b \text{ monomio no cero en } in_w(g), \text{ y} \\ v \cdot a > v \cdot c & \forall \ x^c \text{ monomio en } g \text{ y no en } in_w(g). \end{cases} \tag{0.1}$$

   Los igualdades definen hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ y los desigualdades definen semiespacios abiertos en $\mathbb{R}^n$.

Contuniación de la Prueba:

2. **P.D.:** $C[w] \supseteq C_{\mathcal{G}}[w]$

   Sea $v \in C_{\mathcal{G}}[w]$. Recuerda que $in_{<_w}(I) = in_<(in_w(I))$ y $\{in_w(g) : g \in \mathcal{G}\}$ es una base de Gröbner de $in_w(I)$ con respeto a $<$. Entonces,

   $$in_w(I) = (in_w(g) : g \in \mathcal{G}) = (in_v(g) : g \in \mathcal{G}) \subseteq in_v(I).$$

   Supongamos $in_w(I) \subsetneq in_v(I)$. Eso implica que también

   $$in_{<_w}(I) = in_<(in_w(I)) \subsetneq in_<(in_v(I)) = in_{<_v}(I),$$

   lo cual es una contradicción.

Contuniación de la Prueba:

2. **P.D.:** $C[w] \supseteq C_{\mathcal{G}}[w]$

   Sea $v \in C_{\mathcal{G}}[w]$. Recuerda que $in_{<_w}(I) = in_<(in_w(I))$ y $\{in_w(g) : g \in \mathcal{G}\}$ es una base de Gröbner de $in_w(I)$ con respeto a $<$. Entonces,

   $$in_w(I) = (in_w(g) : g \in \mathcal{G}) = (in_v(g) : g \in \mathcal{G}) \subseteq in_v(I).$$

   Supongamos $in_w(I) \subsetneq in_v(I)$. Eso implica que también

   $$in_{<_w}(I) = in_<(in_w(I)) \subsetneq in_<(in_v(I)) = in_{<_v}(I),$$

   lo cual es una contradicción.

Recordatorio: Una $<$-base de Gröbner G de I es reducida si $\forall\ g \in G$

- $\mathrm{in}_<(g)$ es el único monomio en $\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{in}_<(I)$;
- el coeficiente principal de g es 1.

Contuniación de la Prueba:

3. **P.D.:** $C[w] \subseteq C_{\mathcal{G}}[w]$

   Sea $v \in C[w]$ y $g \in \mathcal{G}$ la $<$-base de Gröbner *reducida* de $in_w(I) = in_v(I)$. Entonces $in_v(g)$ reduce a cero con respeto a $in_w(\mathcal{G}) := \{in_w(g) : g \in \mathcal{G}\}$. Por lo tanto $in_{<_w}(g) \in \text{supp}(in_v(g))$, porque ningún otro monomio de g esta en $in_{<_w}(I) = in_<(in_w(I))$. Escribimos

   $$in_w(g) = in_<(g) + h \quad \text{y} \quad in_v(g) = in_<(g) + h',$$

   donde h, h' son combinaciones k-lineares de monomios estándar.

Contuniación de la Prueba:

3. **P.D.:** $C[w] \subseteq C_{\mathcal{G}}[w]$

   Sea $v \in C[w]$ y $g \in \mathcal{G}$ la $<$-base de Gröbner *reducida* de $in_w(I) = in_v(I)$. Entonces $in_v(g)$ reduce a cero con respeto a $in_w(\mathcal{G}) := \{in_w(g) : g \in \mathcal{G}\}$. Por lo tanto $in_{<_w}(g) \in \mathrm{supp}(in_v(g))$, porque ningún otro monomio de g esta en $in_{<_w}(I) = in_<(in_w(I))$. Escribimos

   $$in_w(g) = in_<(g) + h \quad \text{y} \quad in_v(g) = in_<(g) + h',$$

   donde h, h' son combinaciones k-lineares de monomios estándar. Aplicamos el algoritmo de división a $in_v(g)$ con respeto a $in_w(\mathcal{G})$. Ya sabemos que $in_v(g)$ reduce a cero, entonces después del primer paso el algoritmo nos da $h' - h \in in_w(I)$ como resto. Pero ningún monomio en $h' - h$ esta en $in_{<_w}(I) = in_<(in_w(I))$. Entonces, no podemos reducir más y $h' - h = 0$, que implica $in_v(g) = in_w(g)$ y $v \in C_{\mathcal{G}}[w]$. ∎

La suma de Minkowski

Definición

Para dos poliedros $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^n$ *definimos su* *suma de Minkowski* *como*

$$P_1 + P_2 := \{p_1 + p_2 : p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\}.$$

Para $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro y $w \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\text{cara}_{w}(P) = \{u \in P : \langle w, u \rangle \geq \langle w, v \rangle \forall v \in P\}.$$

Ejercicio 2

Verifica que $\text{cara}_w(P_1 + P_2) = \text{cara}_w(P_1) + \text{cara}_w(P_2)$. *En particular, si* v *es un vértice de* $P_1 + P_2$ *existen vértices únicos* $p_1 \in P_1$ *y* $p_2 \in P_2$ *tal que* $v = p_1 + p_2$.

Complejos poliedrales y abanicos

Definición

Un complejo poliedral Δ *es una colección finita de poliedra en* $\mathbb{R}^n$ *tal que*

1. *si* $P \in \Delta$ *y* F *es una cara de* P*, entonces* $F \in \Delta$*;*
2. *si* $P_1, P_2 \in \Delta$*, entonces* $P_1 \cap P_2$ *es una cara de* P_1 *y de* P_2*.*

El soporte de Δ *es* $|\Delta| := \bigcup_{p\in\Delta} P$*. Si cada* $P \in \Delta$ *es un cono,* Δ *se llama un abanico. Si un abanico* Δ *cumple* $|\Delta| = \mathbb{R}^n$ *se llama completo.*

Podemos asociar un abanico a cada poliedro de la siguente manera: sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro y F una cara de P. El cono normal exterior de F en P es

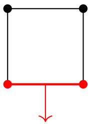
$$\mathcal{N}_P(F) := \{w \in \mathbb{R}^n : \mathrm{cara}_w(P) = F\}.$$

Si F, F' son dos caras de P. Entonces, F' es una cara de F si y solo si $\mathcal{N}_P(F)$ es una cara de $\mathcal{N}_P(F')$. En particular, la colección de todos los conos normales de caras de P es un abanico $\mathcal{N}(P)$, se llama el abanico normal exterior de P.

Ejemplo

Sea $Q = \mathrm{Conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^2$ y $F = \mathrm{Conv}(0, e_1) = \mathrm{cara}_{(0,-a)}(Q)$ para $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces,

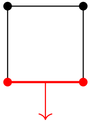
$$\mathcal{N}_Q(F) = \mathrm{Cono}(-e_2)$$



Ejemplo

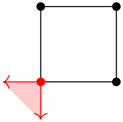
Sea $Q = \mathrm{Conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^2$ y $F = \mathrm{Conv}(0, e_1) = \mathrm{cara}_{(0,-a)}(Q)$ para $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces,

$$\mathcal{N}_Q(F) = \mathrm{Cono}(-e_2)$$



Para $v = (0, 0)$ tenemos $\mathrm{cara}_{(-a,-b)}(Q) = v$ para $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces,

$$\mathcal{N}_Q(v) = \mathrm{Cono}(-e_1, -e_2)$$



Politopos de Newton

Para cada polinomio $f = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{a_i} \in S$ asociamos su politopo de Newton:

$$New(f) := \operatorname{conv}(a_i : i = 1, \ldots, m) \subset \mathbb{R}^n.$$

Ejercicio 3

Sea $f = y^3 + x^4 y + 1 \in k[x, y]$, $w = (1, 2)$ *y* $P = New(f)$.

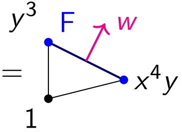
1. *Verifica que* $\operatorname{cara}_w(New(f)) = New(\operatorname{in}_w(f))$.
2. *Verifica que* $\mathcal{N}_P(\operatorname{cara}_w(New(f))) = C[w]$ *de* $I = (f)$.

Tarea 1

Muestra que para cada $w \in \mathbb{R}^n$ *y* $f \in S$ *tenemos* $\operatorname{cara}_w(New(f)) = New(in_w(f))$ *y* $\mathcal{N}_{New(f)}(\operatorname{cara}_w(New(f))) = C[w]$ *de* $I = (f)$.

El cono $C[w]$ y el politopo de Newton

Sea $f = y^3 + x^4y + 1 \in k[x, y]$ y $w = (1, 2)$. Entonces $in_w(f) = y^3 + x^4y$ y $C[w] = \{v \in \mathbb{R}^2 : in_v(f) = in_w(f)\}$. Sea $P = New(f)$ y $F = \text{cara}\,_w(P) = \{a \in P : w \cdot a \geq w \cdot b \;\forall\; b \in P\}$:

$P =$ 

calculamos:

$$
\begin{aligned}
C[w] &= \{v \in \mathbb{R}^2 : in_v(f) = in_w(f)\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^2 : \text{cara}_v(P) = F\} \\
&= \mathcal{N}_P(F)
\end{aligned}
$$

Politopo de Newton y suma de Minkowksi

Lema (Lema 2.2 Sturmfels)

Para $f, g \in S$ tenemos $New(f \cdot g) = New(f) + New(g)$.

Prueba: Es suficiente verificar que $New(f \cdot g)$ y la suma de Minkowskii $New(f) + New(g)$ tienen los mismos vértices. Nota que si f y g son monomios tenemos $x^a x^b = x^{a+b}$ por lo tanto se cumple el Lema en este caso.

Politopo de Newton y suma de Minkowksi

Lema (Lema 2.2 Sturmfels)

Para $f, g \in S$ tenemos $New(f \cdot g) = New(f) + New(g)$.

Prueba: Es suficiente verificar que $New(f \cdot g)$ y la suma de Minkowskii $New(f) + New(g)$ tienen los mismos vértices. Nota que si f y g son monomios tenemos $x^a x^b = x^{a+b}$ por lo tanto se cumple el Lema en este caso.

Para cada poliedro P y $w, w' \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\text{cara}_{w'}(\text{cara}_w(P)) = \text{cara}_{w+\epsilon w'}(P),$$

con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto podemos escoger $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\text{cara}_w(New(f \cdot g))$ y $\text{cara}_w(New(f) + New(g))$ son vértices y $\text{in}_w(f), \text{in}_w(g)$ son monomios (**Ejercicio 3**).

Continuación: Calculamos

$$
\begin{aligned}
\text{cara}_w(New(f\cdot g)) &\overset{\text{Ejercicio 3}}{=} New(in_w(f\cdot g))\\
&= New(in_w(f)\cdot in_w(g))\\
&\overset{\text{caso de monomios}}{=} New(in_w(f)) + New(in_w(g))\\
&\overset{\text{Ejercicio 3}}{=} \text{cara}_w(New(f)) + \text{cara}_w(New(g))\\
&\overset{\text{Ejercicio 2}}{=} \text{cara}_w(New(f)+New(g)).
\end{aligned}
$$

Escogiendo varios $w \in \mathbb{R}^n$ vamos a encontrar a todos los vértices de los dos politopos. Entonces, concluimos que son iguales. ■

Consecuencia para $C[w]$

Corolario

*Sea I un ideal, w un vector de peso, $<_w$ el orden monomial, y $\mathcal{G}$ la base de Gröbner reducida de I y $<_w$. Entonces, $C[w] = C_{\mathcal{G}}[w]$ (***Prueba de la Proposición 2.3***) lo cual implica (***Lema 2.2***)*

$$C[w] = \mathcal{N}_Q(\text{cara}_w(Q)), \quad \textit{con} \quad Q = New(\prod_{g \in \mathcal{G}} g) = \sum_{g \in \mathcal{G}} New(g).$$

El abanico de Gröbner

Sea $I \subset S$ y $w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Definición

Sea $\overline{C[w]}$ la cerradura del cono $C[w]$ en $\mathbb{R}^n$. Definimos el abanico de Gröbner $GF(I)$ del ideal I como el conjunto de los conos cerrados $\overline{C[w]}$ para todos $w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Si existe un politopo P tal que $GF(I) = \mathcal{N}(P)$, P se llama politopo de estado.

Proposición 2 (Proposición 2.4 Sturmfels)

El abanico de Gröbner es un abanico.

Prueba de la Proposición 2.4

Sea $v \in \overline{C[w]}$. Recuerda las ecuaciones que definen $C[w]$

$$\begin{cases} v \cdot a = v \cdot b & \forall\ x^a, x^b \text{ monomio no cero en } in_w(g), \text{ y} \\ v \cdot a > v \cdot c & \quad \forall\ x^c \text{ monomio en } g \text{ y no en } in_w(g). \end{cases}$$

Concluimos que $in_w(I)$ es un ideal inicial de $in_v(I)$. Entonces existe un orden monomial $<$ tal que $in_{<_v}(I) = in_{<_w}(I)$. Sea $\mathcal{G}$ la base de Gröbner reducida para $<_v$ y $Q = \sum_{g \in G} New(g)$.

Prueba de la Proposición 2.4

Sea $v \in \overline{C[w]}$. Recuerda las ecuaciones que definen $C[w]$

$$\begin{cases} v \cdot a = v \cdot b & \forall\ x^a, x^b \text{ monomio no cero en } in_w(g), \text{ y} \\ v \cdot a > v \cdot c & \forall\ x^c \text{ monomio en } g \text{ y no en } in_w(g). \end{cases}$$

Concluimos que $in_w(I)$ es un ideal inicial de $in_v(I)$. Entonces existe un orden monomial $<$ tal que $in_{<_v}(I) = in_{<_w}(I)$. Sea $\mathcal{G}$ la base de Gröbner reducida para $<_v$ y $Q = \sum_{g \in G} New(g)$.

Nota que $\mathcal{G}$ tambien es base de Gröbner para $<_w$ y

$$C[w] = \mathcal{N}_Q(\text{cara}_w(Q)) \quad \text{y} \quad C[v] = \mathcal{N}_Q(\text{cara}_v(Q)).$$

Si $in_w(I)$ es ideal inicial de $in_v(I)$ eso implica que $\text{cara}_w(Q)$ es una cara de $\text{cara}_v(Q)$. De la definición del cono normal concluimos que $\overline{C[v]}$ es una cara de $\overline{C[w]}$.

Continuación de la prueba de la Proposición 2.4

Tenemos que mostrar que $GF(I)$ cumple las axiomas de un abanico:

1. si $C \in GF(I)$ y C' es una cara de C, entonces $C' \in GF(I)$;
2. si $C_1, C_2 \in GF(I)$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 y de C_2.

Continuación de la prueba de la Proposición 2.4

Tenemos que mostrar que $GF(I)$ cumple las axiomas de un abanico:

1. si $C \in GF(I)$ y C' es una cara de C, entonces $C' \in GF(I)$;
2. si $C_1, C_2 \in GF(I)$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 y de C_2.

Vamos:

1. Sea C' una cara de $\overline{C[w]}$. Si v es un vector en el relativamente interior de C' tenemos $C' = \overline{C[v]}$ que es una cara de $\overline{C[w]}$.

Continuación de la prueba de la Proposición 2.4

Tenemos que mostrar que $GF(I)$ cumple las axiomas de un abanico:

1. si $C \in GF(I)$ y C' es una cara de C, entonces $C' \in GF(I)$;
2. si $C_1, C_2 \in GF(I)$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 y de C_2.

Vamos:

1. Sea C' una cara de $\overline{C[w]}$. Si v es un vector en el relativamente interior de C' tenemos $C' = \overline{C[v]}$ que es una cara de $\overline{C[w]}$.
2. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $P := \overline{C[v]} \cap \overline{C[w]}$. Ya vimos que para cada $u \in P$ el cono $\overline{C[u]}$ es una cara de $\overline{C[w]}$ y de $\overline{C[v]}$. Entonces, P es una unión finita de conos $\overline{C[u]}$ que son caras simultaneas. Pero una unión de caras diferentes de un cono no es un cono convexo. Entonces, P es una sola cara simultánea de $\overline{C[w]}$ y $\overline{C[v]}$.

■

Referencias

1. Bernd Sturmfels: Gröbner bases and convex polytopes, Volume 8 of American Mathematical Soc.1996
2. Rekha R. Thomas: Lectures in Geometric Combinatorics, Student Mathematical Library, 33. IAS/Park City Mathematical Subseries. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2006. viii+143 pp. ISBN: 0-8218-4140-8

y para profundizar el tema:

- Günter Ziegler: Lectures on polytopes. Graduate Texts in Mathematics, 152. Springer-Verlag, New York, 1995. x+370 pp. ISBN: 0-387-94365-X