Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Septiembre 20 2022

Contenido

El abanico de Gröbner

Sea $I \subset S$ y $w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.

Definición

Sea $\overline{C[w]}$ la cerradura del cono $C[w]$ en $\mathbb{R}^n$. Definimos el abanico de Gröbner $GF(I)$ del ideal I como el conjunto de los conos cerrados $\overline{C[w]}$ para todos $w \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Si existe un politopo P tal que $GF(I) = \mathcal{N}(P)$, P se llama politopo de estado.

Proposición 1 (Proposición 2.4 y Teorema 1.2 Sturmfels)

El abanico de Gröbner es un abanico finito.

Teorema 1.2: Cada ideal $I \subset S$ tiene un número finito de ideales iniciales (utiliza que S es Noetheriano).

El abanico de Gröbner de un ideal homogéneo

Teorema (Teorema 2.5, Sturmfels)

Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo. Entonces existe un politopo $P \subset \mathbb{R}^n$ tal que el abanico normal exterior $\mathcal{N}(P)$ coincide con el abanico de Gröbner $GF(I)$.

El politopo P del Teorema se llama un politopo de estado de I. El capitulo [§2,Sturmfels] se dedica a la construcción explicita de un politopo de estado usando una base de Gröbner universal minimal. Para ideales tóricos existe una construcción más simple, por ejemplo en [§14,Thomas].

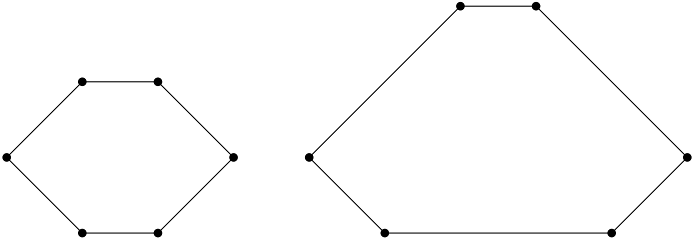
Nota que en particular el abanico de Gröbner de un ideal homogéneo es completo, es decir $\mathrm{supp}(\mathrm{GF}(I)) = \mathbb{R}^n$.

Isomorfia

Definición

Dos politopos Q, Q' son *fuertemente isomorfos* *si* $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(Q')$.

Por ejemplo, los siguientes dos politopos en $\mathbb{R}^2$ son fuertemente isomorfos:



Un politopo de estados de politopos de Newton

Proposición 2 (Proposición 2.8, Sturmfels)

Sea f un polinomio homogéneo y $I = (f)$. Entonces, $New(f)$ es un politopo de estado para I.

Un politopo de estados de politopos de Newton

Proposición 2 (Proposición 2.8, Sturmfels)

Sea f un polinomio homogéneo y $I = (f)$. Entonces, $New(f)$ es un politopo de estado para I.

Ejercicio 1

Sea $J = \langle f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

1. *Calcula el politopo de Newton de f, muestra que vive en un hiperplano H y que el vector normal de H pertenece al espacio lineal $\mathcal{L}(I)$.*
2. *Verifica la Proposición 2.8 en este caso. (se puede dibujar más fácil en el cociente $\mathbb{R}^3/\mathcal{L}(I)$)*

Un politopo de estados de politopos de Newton

Proposición 2 (Proposición 2.8, Sturmfels)

Sea f un polinomio homogéneo y $I = (f)$. Entonces, New(f) es un politopo de estado para I.

Ejercicio 1

Sea $J = \langle f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

1. *Calcula el politopo de Newton de f, muestra que vive en un hiperplano H y que el vector normal de H pertenece al espacio lineal $\mathcal{L}(I)$.*
2. *Verifica la Proposición 2.8 en este caso. (se puede dibujar más fácil en el cociente $\mathbb{R}^3/\mathcal{L}(I)$)*

Corolario (Corolario 2.9, Sturmfels)

Sea $\mathcal{U}$ una base de Gröbner universal de I que también es base de Gröbner reducida para cada orden monomial. Entonces $\sum_{g \in \mathcal{U}}$ New(g) es un politopo de estado de I.

Contenido

1. Bases de Gröbner
2. Geometría poliedral
3. Algoritmos
4. Abanicos de Gröbner
5. **La Tropicalización**
    1. Hipersuperficie tropical
    2. (Pre-)variedades tropicales
    3. Bases tropicales
    4. Teorema fundamental y estructural
    5. Polinomios de Laurent
    6. Intersecciones y Conectividad

Geometría tropical

La geometría tropical es un área de las matemáticas joven. En términos generales se trata de estudiar objetos geométricos sobre el semianillo tropical:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^T &:= (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes) \\ a \oplus b &:= \max\{a, b\}, \\ a \otimes b &:= a + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \end{aligned}$$

Uno puede pasar de la geometría algebraica a la geometría tropical, este proceso se llama tropicalización.

Hipersuperficie tropical

Sea k un campo con $char(k) = 0$. Para simplificar trabajamos solo con polinomios y ideales homogéneos.

Definición

Sea $f \in S$ un polinomio (homogéneo). La hipersuperficie tropical de f es el conjunto

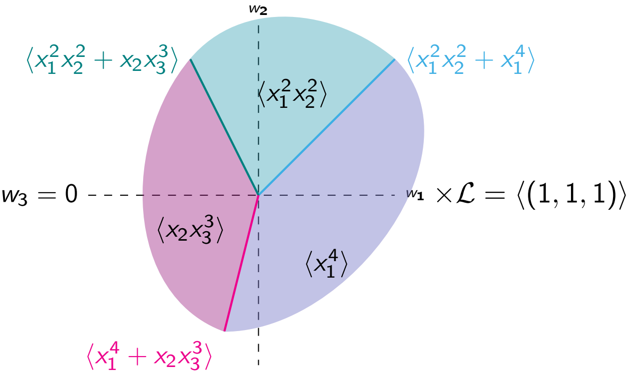
$$Trop(f) = \{w \in \mathbb{R}^n : in_w(f) \text{ no es un monomio}\}.$$

Ejercicio 2

Verifica que los conos máximales de $Trop(f)$ corresponden a los conos de codimensión 1 en $\mathcal{N}(New(f))$.

Ejemplo

Sea $J = \langle x_1^2x_2^2 + x_1^4 + x_2x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Entonces $GF(J)$ es $\mathbb{R}^3$ con la siguiente estructura de abanico:



La tropicalización de J consiste de los trés rayos y el espacio lineal $\mathcal{L}$.

(Pre-)Variedad tropical

Definición

Una prevariedad tropical es una intersección finita de hipersuperficies tropicales: $Trop(f_1) \cap \cdots \cap Trop(f_s)$, *para* $f_1, \ldots, f_s \in S$ *(homogéneos).*

Definición

Sea $I \subset S$ *un ideal homogéneo. Su tropicalización es*

$$Trop(I) := \bigcap_{f \in I} Trop(f) \subset \mathbb{R}^n.$$

El conjunto $Trop(I)$ *se llama una variedad tropical.*

Definición

Sean $f_1, \ldots, f_s \in I$ *tal que* $Trop(I) = Trop(f_1) \cap \cdots \cap Trop(f_s)$. *En este caso* $\{f_1, \ldots, f_s\}$ *se llama una base tropical de* I.

Bases tropicales

Teorema (Teorema 11, BJSST)

Cada ideal $I \subset S$ tiene una base tropical.

Ejemplo: Para cada ideal principal $I = (f)$ en S, $\{f\}$ es una base tropical.

Bases tropicales

Teorema (Teorema 11, BJSST)

Cada ideal $I \subset S$ tiene una base tropical.

Ejemplo: Para cada ideal principal $I = (f)$ en S, $\{f\}$ es una base tropical.

Ejercicio 3

Sea I la intersección de los tres ideales lineales $(x+y,z),(x+z,y),(y+z,x) \subset \mathbb{C}[x,y,z]$.

1. *¿Cuál es su tropicalización $\mathcal{T}(I)$?*

Bases tropicales

Teorema (Teorema 11, BJSST)

Cada ideal $I \subset S$ tiene una base tropical.

Ejemplo: Para cada ideal principal $I = (f)$ en S, $\{f\}$ es una base tropical.

Ejercicio 3

Sea I la intersección de los tres ideales lineales $(x+y,z),(x+z,y),(y+z,x) \subset \mathbb{C}[x,y,z]$.

1. *¿Cuál es su tropicalización $\mathcal{T}(I)$?*
2. *Una base de Gröbner universal minimal es*

$$\{x+y+z, x^2y+xy^2, y^2z+yz^2, x^2z+xz^2\} = \mathcal{F}$$

Calcula la prevariedad tropical $\bigcap_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{T}(f)$. ¿Es cierto $\mathcal{T}(I) = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} \mathcal{T}(f)$?

Prueba del Teorema 11

Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de generadores de I que no es una base tropical. Escojemos un cono (abierto) $C[w]$ en el $GF(I)$ tal que

1. la intersección $C[w] \cap (\cap_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Trop}(f))$ no es vacía;
2. el ideal inicial $in_w(I)$ contiene un monomio x^m.

Sea $<_w$ un orden monomial que refine w, $\mathcal{G}_{<_w}$ la base de Gröbner reducida, h una expresión estándar de x^m con respeto a $\mathcal{G}_{<_w}$ y $f := x^m - h$.

Nota que x^m reduce a cero con respeto a $\{in_{<_w}(g) : g \in \mathcal{G}_{<_w}\}$ y cada monomio de h tiene w-peso más pequeño que $\langle w, m \rangle = \deg_w(x^m)$. Además h solo depende de $\mathcal{G}_{<_w}$, no de w. Por lo tanto, para cada $v \in C[w]$ tenemos $x^m = in_v(f)$ y así $C[w]$ no es un cono en $\mathrm{Trop}(I)$.

Continuación de la Prueba del Teorema

Reemplazamos $\mathcal{F}$ por $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cup \{f\}$ y repetimos el procedimiento anterior. De esta manera vamos a pasar por todo el abanico de Gröbner eliminando conos cuyos ideal inicial contiene algún monomio. Como el abanico de Gröbner tiene un numero finito de conos **Teorema 1.2**, el proceso termina en tiempo finito. ■

Comentario

Aún existen, las bases tropicales pueden ser muy grandes. Por ejemplo, para cada $1 \leq d \leq n$ existe un ideal linear en S tal que cualquier base tropical de formas lineares en I tiene al menos $\frac{1}{n-d+1}\binom{n}{d}$ elementos [Teorema 2.19 en BJSST].

Referencias

1. Bogart, T.; Jensen, A. N.; Speyer, D.; Sturmfels, B.; Thomas, R. R.: Computing tropical varieties. J. Symbolic Comput. 42 (2007), no. 1-2, 54–73.
2. Bieri, R.; Groves, J. R. J.: A rigidity property for the set of all characters induced by valuations. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), no. 2, 425–434.
3. Maclagan, D.; Sturmfels, B.: Introduction to tropical geometry. Graduate Studies in Mathematics, 161. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. xii+363 pp. ISBN: 978-0-8218-5198-2
4. Bernd Sturmfels: Gröbner bases and convex polytopes, Volume 8 of American Mathematical Soc.1996
5. Rekha R. Thomas: Lectures in Geometric Combinatorics, Student Mathematical Library, 33. IAS/Park City Mathematical Subseries. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2006. viii+143 pp. ISBN: 0-8218-4140-8