Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Septiembre 21 2022

Contenido

Teorema estructural

1. La dimensión del ideal I es definida como $\dim_{Krull}(S/I) = \dim_k(V(I))$ donde $V(I) \subset \mathbb{A}_k^n$ es la variedad afín.
2. Sea Σ un abanico y sean $r_1, \ldots, r_s$ sus rayos con generadores primitivos $\rho_1, \ldots \rho_s$. El abanico se llama balanceado si existen $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\sum m_i \rho_i = 0$;
3. Una faceta de Σ es un $C \in \Sigma$ que no es cara de ningún otro $C' \in \Sigma$. El abanico Σ es puro si todos sus facetas tienen la misma dimensión.

Teorema estructural

1. La dimensión del ideal I es definida como $\dim_{Krull}(S/I) = \dim_k(V(I))$ donde $V(I) \subset \mathbb{A}_k^n$ es la variedad afín.
2. Sea Σ un abanico y sean $r_1, \ldots, r_s$ sus rayos con generadores primitivos $\rho_1, \ldots \rho_s$. El abanico se llama balanceado si existen $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $\sum m_i \rho_i = 0$;
3. Una faceta de Σ es un $C \in \Sigma$ que no es cara de ningún otro $C' \in \Sigma$. El abanico Σ es puro si todos sus facetas tienen la misma dimensión.

Teorema (Teorema estructural de variedades tropicales)

Para cada ideal primo I de dimensión d su tropicalización $Trop(I)$ es el soporte de un abanico balanceado puro de dimensión d.

Que es un abanico de dimensión d es consecuencia de [Bieri y Groves, 1986]. Para lo demás es [Theorem 3.3.6 in Maclagan–Sturmfels].

Teorema fundamental

Teorema (Teorema fundamental)

Sea $I \subset S$ un ideal primo de dimensión d. Entonces,

$$Trop(I) = \{w \in \mathbb{R}^n : in_w(I) \text{ no contiene monomios}\} =: NoMon(I),$$

En particular, $Trop(I) \subset GF(I)$ tiene la estructura de un abanico.

Teorema fundamental

Teorema (Teorema fundamental)

Sea $I \subset S$ un ideal primo de dimensión d. Entonces,

$$Trop(I) = \{w \in \mathbb{R}^n : in_w(I) \text{ no contiene monomios}\} =: NoMon(I),$$

En particular, $Trop(I) \subset GF(I)$ tiene la estructura de un abanico.

Sobre la prueba: Una inclusión es fácil: $NoMon(I) \subseteq Trop(I)$: Tomamos $w \notin \mathrm{Trop}(I)$, entonces existe un $g \in I$ tal que su forma inicial $in_w(g)$ es un monomio. Pues $in_w(I) \ni in_w(g)$ entonces $w \notin NoMon(I)$. Para la otra inclusión: [Theorem 3.2.5 in Maclagan–Sturmfels].

Ejemplo: Ideales tóricos

Ejercicio 1

Sea $I = (c_u x^u - c_v x^v : Au = Av)$ *un ideal tórico, es decir es primo y generado por binomios. Entonces, su tropicalización satisface*

$$\mathcal{T}(I) = \mathcal{L}(I) = \{w \in \mathbb{R}^n : \mathrm{in}_w(I) = I\}$$

En particular, módulo $\mathcal{L}(I)$ *la tropicalozación de un ideal tórico es un punto.*

Degeneraciones tóricas de Gröbner

Sea $I \subset S$ un ideal primo homogéneo. Una *degeneración tórica de Gröbner* es una degeneración de Gröbner de I con respecto a un vector de peso $w \in \mathrm{GR}(I)$ tal que $\mathrm{in}_w(I)$ es un ideal tórico (i.e. es un ideal primo generado por binomios).

Degeneraciones tóricas de Gröbner

Sea $I \subset S$ un ideal primo homogéneo. Una *degeneración tórica de Gröbner* es una degeneración de Gröbner de I con respecto a un vector de peso $w \in \mathrm{GR}(I)$ tal que $\mathrm{in}_w(I)$ es un ideal tórico (i.e. es un ideal primo generado por binomios).

Corolario

Si $w \in GR(I)$ induce una degeneración tórica de Gröbner de I, entonces w pertenece a un cono maximal de $\mathcal{T}(I)$.

Prueba del Corolario

Si w induce una degeneración tórica de Gröbner si y solo si $\mathrm{in}_w(I)$ es tórico. En particular, es generado por binomios y por lo tanto no contiene monomios. **Teorema fundamental** implica que $w \in \mathcal{T}(I)$.

Prueba del Corolario

Si w induce una degeneración tórica de Gröbner si y solo si $\mathrm{in}_w(I)$ es tórico. En particular, es generado por binomios y por lo tanto no contiene monomios. **Teorema fundamental** implica que $w \in \mathcal{T}(I)$.

Recuerda la estructura de las cerraduras $\overline{C[w]}$: supongamos que $C[w]$ no es un cono maximal en $\mathcal{T}(I)$. Entonces existe $v \in \mathcal{T}(I)$ tal que $w \in \overline{C[v]} \setminus C[v]$ y

$$\mathrm{in}_{\,v}(\mathrm{in}_{\,w}(I)) = \mathrm{in}_{\,v}(I).$$

En particular, $v \in \mathcal{T}(\mathrm{in}_w(I)) = \mathcal{L}(\mathrm{in}_w(I)) \ni w$, una contradicción. ■

Polinomios de Laurent

Sea $k[\mathbb{x}^{\pm}] := k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ el anillo de los polinomios de Laurent. Los monomios $Mon^{\pm} \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$ son en biyección con $\mathbb{Z}^n$ y son invertibles. En particular, tenemos la acción de $GL_n(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{Z}^n$ que se extiende a $Mon^{\pm}$:

$$A \cdot x^m := x^{A \cdot m}, \quad A \in GL_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow A \cdot m \in \mathbb{Z}^n \quad y \quad A \cdot Mon^{\pm} = Mon^{\pm}.$$

se llama un cambio de coordenadas multiplicativo.

Polinomios de Laurent

Sea $k[\mathbb{x}^{\pm}] := k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ el anillo de los polinomios de Laurent. Los monomios $Mon^{\pm} \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$ son en biyección con $\mathbb{Z}^n$ y son invertibles. En particular, tenemos la acción de $GL_n(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{Z}^n$ que se extiende a $Mon^{\pm}$:

$$A \cdot x^m := x^{A \cdot m}, \quad A \in GL_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow A \cdot m \in \mathbb{Z}^n \quad y \quad A \cdot Mon^{\pm} = Mon^{\pm}.$$

se llama un cambio de coordenadas multiplicativo.

Para $f = \sum_{i=1}^m c_i x^{a_i} \in S$ definimos $f^{\pm} := \sum_{i=1}^m c_i x^{a_i} \in k[\mathbb{x}^{\pm}]$. Para un ideal $I \subset S$ definimos $I^{\pm} := (f^{\pm} : f \in I) \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$.

Polinomios de Laurent

Sea $k[\mathbb{x}^{\pm}] := k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ el anillo de los polinomios de Laurent. Los monomios $Mon^{\pm} \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$ son en biyección con $\mathbb{Z}^n$ y son invertibles. En particular, tenemos la acción de $GL_n(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{Z}^n$ que se extiende a $Mon^{\pm}$:

$$A \cdot x^m := x^{A \cdot m}, \quad A \in GL_n(\mathbb{Z}) \Rightarrow A \cdot m \in \mathbb{Z}^n \quad y \quad A \cdot Mon^{\pm} = Mon^{\pm}.$$

se llama un cambio de coordenadas multiplicativo.

Para $f = \sum_{i=1}^m c_i x^{a_i} \in S$ definimos $f^{\pm} := \sum_{i=1}^m c_i x^{a_i} \in k[\mathbb{x}^{\pm}]$. Para un ideal $I \subset S$ definimos $I^{\pm} := (f^{\pm} : f \in I) \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$.

Muchos definiciones se extienden directamente de S a $k[\mathbb{x}^{\pm}]$, por ejemplo:

- la forma inicial y el ideal inicial con respeto a un vector de peso;
- las hipersuperficies tropicales y las (pre-)variedades tropicales

La variedad tropical y polinomios de Laurent

Ejercicio 2

Para cada ideal $I \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$ *y* $w \in \mathbb{R}^n$ *tenemos que* $in_w(I)$ *no contiene ningún monomio si y solo si* $in_w(I) \neq (1) = k[\mathbb{x}^{\pm}]$.

La variedad tropical y polinomios de Laurent

Ejercicio 2

Para cada ideal $I \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$ *y* $w \in \mathbb{R}^n$ *tenemos que* $in_w(I)$ *no contiene ningún monomio si y solo si* $in_w(I) \neq (1) = k[\mathbb{x}^{\pm}]$.

Lema (BJSST, p. 60)

Para cada ideal $I \subset S$ *la variedad tropical* $Trop(I)$ *solo depende de* $I^{\pm}$.

La variedad tropical y polinomios de Laurent

Ejercicio 2

Para cada ideal $I \subset k[\mathbb{x}^{\pm}]$ *y* $w \in \mathbb{R}^n$ *tenemos que* $in_w(I)$ *no contiene ningún monomio si y solo si* $in_w(I) \neq (1) = k[\mathbb{x}^{\pm}]$.

Lema (BJSST, p. 60)

Para cada ideal $I \subset S$ *la variedad tropical* $Trop(I)$ *solo depende de* $I^{\pm}$.

Prueba: Primero tratamos el caso de hipersuperficies: sea $f = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{a_i} \in S$ y $w \in \mathbb{R}^n$. Tenemos $in_w(f) = in_w(f^{\pm})$, entonces $\mathrm{Trop}(f) = \mathrm{Trop}(f^{\pm})$.

Sean I_1, I_2 dos ideales en S tal que $I_1^{\pm} = I_2^{\pm}$ en $k[\mathbb{x}^{\pm}]$. Toma $w \notin \mathrm{Trop}(I_1)$. Pues existe $f \in I_1$ tal que $in_w(f)$ es un monomio. Como $I_1^{\pm} = I_2^{\pm}$ sabemos que existe un monomio $x^m \in k[\mathbb{x}^{\pm}]$ tal que $x^m f \in I_2^{\pm}$. Pero $in_w(x^m f) = x^m in_w(f)$ es un monomio. Entonces $w \notin \mathrm{Trop}(I_2)$. ■

Intersecciones

Sean I, J dos ideales y $w \in \text{Trop}(I) \cap \text{Trop}(J)$. Sean $F \subset \text{Trop}(I)$ y $G \subset \text{Trop}(J)$ los conos (abiertos) con $w \in G \cap F$.

Si $\mathbb{R}F \cup \mathbb{R}G = \mathbb{R}^n$ decimos que $\text{Trop}(I) \cap \text{Trop}(J)$ es *transversal* en w. Si existe tal w se dice que $\text{Trop}(I)$ y $\text{Trop}(J)$ *se encuentran transversalmente*.

Intersecciones

Sean I, J dos ideales y $w \in \text{Trop}(I) \cap \text{Trop}(J)$. Sean $F \subset \text{Trop}(I)$ y $G \subset \text{Trop}(J)$ los conos (abiertos) con $w \in G \cap F$.

Si $\mathbb{R}F \cup \mathbb{R}G = \mathbb{R}^n$ decimos que $\text{Trop}(I) \cap \text{Trop}(J)$ es *transversal* en w. Si existe tal w se dice que $\text{Trop}(I)$ y $\text{Trop}(J)$ *se encuentran transversalmente*.

Lema (Lema 15, BJSST, Intersección transversal)

Sean I, J ideales en S cuyos variedades tropicales $Trop(I)$ y $Trop(J)$ se encuentran transversalmente en $w \in \mathbb{R}^n$. Entonces $w \in Trop(I + J)$.

Intersecciones

Sean I, J dos ideales y $w \in \text{Trop}(I) \cap \text{Trop}(J)$. Sean $F \subset \text{Trop}(I)$ y $G \subset \text{Trop}(J)$ los conos (abiertos) con $w \in G \cap F$.

Si $\mathbb{R}F \cup \mathbb{R}G = \mathbb{R}^n$ decimos que $\text{Trop}(I) \cap \text{Trop}(J)$ es *transversal* en w. Si existe tal w se dice que $\text{Trop}(I)$ y $\text{Trop}(J)$ *se encuentran transversalmente*.

Lema (Lema 15, BJSST, Intersección transversal)

Sean I, J ideales en S cuyos variedades tropicales $Trop(I)$ y $Trop(J)$ se encuentran transversalmente en $w \in \mathbb{R}^n$. Entonces $w \in Trop(I + J)$.

Corolario (Corolario 16, BJSST)

Sean $I, J \subset S$ ideales. Entonces $Trop(I + J) \subseteq Trop(I) \cap Trop(J)$. Si además la intersección $Trop(I) \cap Trop(J)$ es transversal en cada punto que no es el origen y la intersección no contiene solo el origen, entonces $Trop(I + J) = Trop(I) \cap Trop(J)$.

Conectividad

Sea I un ideal primo de dimensión d en S. Entonces su variedad tropical $\mathrm{Trop}(I)$ se llama irreducible.

Teorema (Teorema 14 BJSST)

Cada variedad tropical irreducible es conectada en codimensión uno: es decir, para cada I primo de dimensión d y cada pareja de facetas $F, F' \in Trop(I)$ existe una secuencia de facetas

$$F = F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}, F_r = F'$$

tal que $F_i \cap F_{i+1}$ es un cono de dimensión $d-1$.

Sobre la prueba del Teorema 14

Primero, I se reemplaza por $I^{\pm}$ que también es primo. La prueba es con inducción sobre d.

$d = 1$ es conectado en dimensión cero.

Sobre la prueba del Teorema 14

Primero, I se reemplaza por $I^{\pm}$ que también es primo. La prueba es con inducción sobre d.

$d = 1$ es conectado en dimensión cero.

$d = 2$ Bajo un cambio multiplicativo de coordenadas es suficiente verificar para $\mathcal{T}(I) \cap \{x_n = 1\}$. Incluimos $\mathbb{C}[x_n] \to K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ donde $K = \mathbb{C}\{\{x_n\}\}$ son las series de Piuseux con exponentes reales. Sea $I' \subset K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ el imagen de I, entonces $\mathcal{T}(I') = \mathcal{T}(I) \cap \{x_n = 1\}$ **[Teorema 9.17, Sturmfels 2002]** y **[Einsiedler-Kaoranov-Lind 2006]** probaron que $\mathcal{T}(I')$ es conectado en codimensión uno.

Sobre la prueba del Teorema 14

$d \geq 3$ Afirmación: Para F, F' facetas de $\mathcal{T}(I)$ se puede encontrar una hipersuperficie H tal que $H \cap F$ y $H \cap F'$ tienen dimensión $d-1$ y se $H \cap \mathcal{T}(I)$ es transversal en cada punto menos el origen.

Sobre la prueba del Teorema 14

$d \geq 3$ Afirmación: Para F, F' facetas de $\mathcal{T}(I)$ se puede encontrar una hipersuperficie H tal que $H \cap F$ y $H \cap F'$ tienen dimensión $d-1$ y se $H \cap \mathcal{T}(I)$ es transversal en cada punto menos el origen.

$H = \mathcal{T}(f)$ para algún binomio $f_u = \prod_{i:a_i>0}(u_i x_i)^{a_i} - \prod_{j:a_j<0}(u_j x_j)^{-a_j}$ en $S, a \in \mathbb{Z}^n, u \in (\mathbb{C}^*)^n$. **Lema 15** implica

$$H \cap \mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(I + (f)).$$

I es primo de dimensión d y $f_u \notin I$ por lo tanto $I + (f_u)$ es de dimensión $d-1$ **Teorema de Krull para ideales principales**.

Sobre la prueba del Teorema 14

$d \geq 3$ Afirmación: Para F, F' facetas de $\mathcal{T}(I)$ se puede encontrar una hipersuperficie H tal que $H \cap F$ y $H \cap F'$ tienen dimensión $d-1$ y se $H \cap \mathcal{T}(I)$ es transversal en cada punto menos el origen.

$H = \mathcal{T}(f)$ para algún binomio $f_u = \prod_{i:a_i>0}(u_i x_i)^{a_i} - \prod_{j:a_j<0}(u_j x_j)^{-a_j}$ en S, $a \in \mathbb{Z}^n, u \in (\mathbb{C}^*)^n$. **Lema 15** implica

$$H \cap \mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f) \cap \mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(I + (f)).$$

I es primo de dimensión d y $f_u \notin I$ por lo tanto $I + (f_u)$ es de dimensión $d-1$ **Teorema de Krull para ideales principales**.

Si $I + (f_u)$ es primo aplica la inducción. Nota que $\mathcal{T}(I + (f_u))$ solo depende de la subvariedad de $(\mathbb{C}^*)^n$:

$$V(I + (f_u)) = V(I) \cap V(f_u) = V(I) \cap u^{-1} \cdot V(f_{(1,\dots,1)}).$$

El **Teorema de Kleimann [Hartshorne III.10.8]** aplicado al grupo $(\mathbb{C}^*)^n$ implica que para u genérico $V(I) \cap u^{-1} \cdot V(f_{(1,\dots,1)})$ es una variedad irreducible.

Ideales no homogéneos

Para $f = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{a_i} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ recuerda su homogenización

$$f^{(1,\ldots,1)} := \sum_{i=1}^{m} c_i x^{a_i} x_0^{\deg(f) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}} \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Para un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ de manera similar tenemos su homogenización $I^{(1,\ldots,1)} := (f^{(1,\ldots,1)} : f \in I) \subset k[x_0, \ldots, x_n]$.

Ideales no homogéneos

Para $f = \sum_{i=1}^{m} c_i x^{a_i} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ recuerda su homogenización

$$f^{(1,\ldots,1)} := \sum_{i=1}^{m} c_i x^{a_i} x_0^{\deg(f) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}} \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Para un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ de manera similar tenemos su homogenización $I^{(1,\ldots,1)} := (f^{(1,\ldots,1)} : f \in I) \subset k[x_0, \ldots, x_n]$.

Ejercicio 3

Muestra que para $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$in_w(I) \text{ contiene un monomio} \quad \Leftrightarrow \quad in_{(0,w)}(I^{(1,\ldots,1)}) \text{ contiene un monomio}.$$

En particular, con respeto a la computación, es suficiente tener algoritmos para calcular la tropicalización de un ideal homogéneo.

Calcular una hipersuperficie tropical

Recuerda: $v \in C[w] \Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{G}_{<_w}(I) : \mathrm{in}_w(\mathrm{in}_v(g)) = \mathrm{in}_w(g)$.

Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ de conos poliedrales *representa* un abanico $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ es el conjunto de F con todas las caras de sus conos.

Calcular una hipersuperficie tropical

Recuerda: $v \in C[w] \Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{G}_{<_w}(I) : \mathrm{in}_w(\mathrm{in}_v(g)) = \mathrm{in}_w(g)$.

Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ de conos poliedrales *representa* un abanico $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ es el conjunto de F con todas las caras de sus conos.

Input: $f \in S$
Output: Una representación F de un abanico cuyo soporte es $\mathcal{T}(f)$.
$F = \emptyset$;
$\forall v \in \mathrm{New}(f)$ vértice
  calcula el cono normal $\mathcal{N}_v(\mathrm{New}(f))$;
  $F := F \cap \{\text{facetas de } \mathcal{N}_v(\mathrm{New}(f))\}$;

`TropicalCurve`: Calcular una base tropical de una curva

Recuerda del **Teorema 11**: $f \in I$ tal que $\mathcal{T}(f) \cap C[w] = \varnothing$ se llama un *testigo*.

Para dos abanicos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ definimos su *refinamiento común* $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 = \{C_1 \cap C_2 : C_i \in \mathcal{F}_i\}$.

`TropicalCurve`: Calcular una base tropical de una curva

Recuerda del **Teorema 11**: $f \in I$ tal que $\mathcal{T}(f) \cap C[w] = \varnothing$ se llama un *testigo*.

Para dos abanicos $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ definimos su *refinamiento común* $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 = \{C_1 \cap C_2 : C_i \in \mathcal{F}_i\}$.

Input: Un conjunto G de genradores de un ideal que define una curva tropical
Output: Una base tropical G' de I.
Calcula una representación F de $\bigwedge_{g \in G} \mathcal{T}(g)$;
    $\forall C \in F$ sea $w \in C^\circ$;
        si $\mathrm{in}_w(I)$ contiene un monomio calcula un testigo f;
            empieza de nuevo con $G = G \cap \{f\}$;
    $G' := G$

Lift

Una $<$-base de Gröbner *marcada* es una pareja $(G, \mathrm{in}_<(G))$ donde G es una $<$-base de Gröbner y $\mathrm{in}_<(G) = \{\mathrm{in}_<(g) : g \in G\}$.

Un algoritmo clásico de las bases de Gröbner es el *levantamiento* de una base de Gröbner

Lift

Una $<$-base de Gröbner *marcada* es una pareja $(G, \text{in}_<(G))$ donde G es una $<$-base de Gröbner y $\text{in}_<(G) = \{\text{in}_<(g) : g \in G\}$.

Un algoritmo clásico de las bases de Gröbner es el *levantamiento* de una base de Gröbner

---

Input: Dos ordenes monomiales $<$ y $<'$, $<$ dos bases de Gröbner reducidas marcadas

1. $\mathcal{G}_{<'}(I)$;
2. $\mathcal{G}_{<_w}(\text{in}_w(I))$ con w tal que $\text{in}_{<'}(\text{in}_w(I)) = \text{in}_{<'}(I)$.

Output: La base de Gröbner reducida marcada $\mathcal{G}_{<_w}(I)$.

Calcular un cono de partida: `StartingCone`

Input: Una base reducida marcada de Gröbner y un orden monomial
Output: Dos bases de Gröbner reducidas marcadas $(\mathcal{G}_{\mathsf{Init}}, \mathcal{G}_{\mathsf{Full}})$

1. para $\mathrm{in}_w(I)$ un ideal inicial sin monomios con respecto a $<_w$ con $\dim \mathcal{L}(\mathrm{in}_w(I)) = d$;
2. para I con respecto a $<_w$.

Calcular un cono de partida: `StartingCone`

Input: Una base reducida marcada de Gröbner y un orden monomial
Output: Dos bases de Gröbner reducidas marcadas $(\mathcal{G}_{\mathsf{Init}}, \mathcal{G}_{\mathsf{Full}})$

1. para $\mathrm{in}_w(I)$ un ideal inicial sin monomios con respecto a $<_w$ con $\dim \mathcal{L}(\mathrm{in}_w(I)) = d$;
2. para I con respecto a $<_w$.

Si $\dim(\mathcal{L}(I)) = d$:
    devuelva $(\mathcal{G}_<(I), \mathcal{G}_<(I))$;
En otro caso:
    calcula una base de Gröbner reducida de I aleatoria;
    calcula un rayo aleatorio w del cono de Gröbner asociada;
Hasta que $\mathrm{in}_w(I)$ es libre de monomios;
    Calcula $\mathcal{G}_{<_w}(I)$
    $(\mathcal{G}_{\mathsf{Init}}, \mathcal{G}_{\mathsf{Full}}) :=$ `StartingCone`$(\mathcal{G}_{<_w}(\mathrm{in}_w(I)))$;
    `Lift`$(\mathcal{G}_{<_w}(I), \mathcal{G}_{\mathsf{Full}}) = \mathcal{G}'$;
    devuelva $(\mathcal{G}_{\mathsf{Init}}, \mathcal{G}')$;

Vecinos

Input: Una pareja de bases de Gröbner reducidas marcadas $(\mathcal{G}_{<_w}(I), \mathcal{G}_{<_w}(\mathrm{in}_w(I)))$ con $\mathrm{in}_w(I)$ libre de monomios y $\dim(C[w]) = d$.
Output: Una colección V de parejas $(\mathcal{G}_{<'_w}(I), \mathcal{G}_{<'_w}(\mathrm{in}_{w'}(I)))$ tal que

1. $\dim(C[w']) = d$
2. $\overline{C[w']} \subset \mathcal{T}(I)$
3. $\overline{C[w]}$ y $\overline{C[w']}$ comparten una faceta.

Vecines

Input: Una pareja de bases de Gröbner reducidas marcadas $(\mathcal{G}_{<_w}(I), \mathcal{G}_{<_w}(\mathrm{in}_w(I)))$ con $\mathrm{in}_w(I)$ libre de monomios y $\dim(C[w]) = d$.
Output: Una colección V de parejas $(\mathcal{G}_{<'_w}(I), \mathcal{G}_{<'_w}(\mathrm{in}_{w'}(I)))$ tal que

1. $\dim(C[w']) = d$
2. $\overline{C[w']} \subset \mathcal{T}(I)$
3. $\overline{C[w]}$ y $\overline{C[w']}$ comparten una faceta.

$N := \varnothing$;
Calcula el conjunto $\mathcal{F}$ de facetas de $\overline{C[w]}$;
Para $F \in \mathcal{F}$:
    calcula un $u \in F^{\circ}$ y $\mathrm{in}_u(I)$;
    calcula un punto interior v de cada rayo de la curva tropical $\mathcal{T}(\mathrm{in}_u(I))$;
    Para cada v
        Calcula $(\mathcal{G}_{<_v}(\mathrm{in}_v(I)), \mathcal{G}_{<_v}(I))$;
        $\mathcal{G}_{(<_v)_u}(I) = \texttt{Lift}(\mathcal{G}_{<_w}(I), \mathcal{G}_{(<_v)_u}(\mathrm{in}_u(I)))$;
        $N := N \cup \{(\mathcal{G}_{(<_v)_u}(\mathrm{in}_v(\mathrm{in}_u(I))), \mathcal{G}_{(<_v)_u}(I))\}$;

Vecinos

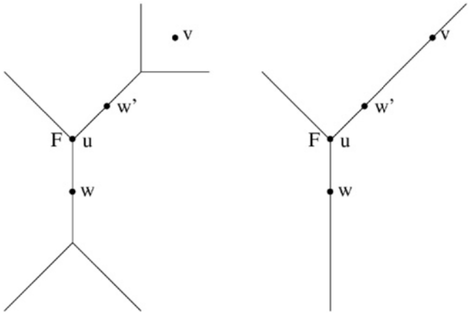

Fig. 1. A projective drawing of the situation in Algorithm 7, with $\mathcal{T}(I)$ on the left and $\mathcal{T}(\mathrm{in}_{\mathbf{u}}(I))$ on the right.

TropicalTraverse

Input: Una pareja de bases de Gröbner reducidas marcadas $(\mathcal{G}_{<_w}(I), \mathcal{G}_{<_w}(\mathrm{in}_w(I)))$ con $\mathrm{in}_w(I)$ libre de monomios y $\dim(C[w]) = d$.
Output: Una colección T de parejas $(\mathcal{G}_{<'_w}(I), \mathcal{G}_{<'_w}(\mathrm{in}_{w'}(I)))$ tal que $\dim(C[w']) = d$ y $\mathcal{T}(I) = \bigcup \overline{C[w']}$.

TropicalTraverse

Input: Una pareja de bases de Gröbner reducidas marcadas $(\mathcal{G}_{<_w}(I), \mathcal{G}_{<_w}(\mathrm{in}_w(I)))$ con $\mathrm{in}_w(I)$ libre de monomios y $\dim(C[w]) = d$.
Output: Una colección T de parejas $(\mathcal{G}_{<'_w}(I), \mathcal{G}_{<'_w}(\mathrm{in}_{w'}(I)))$ tal que $\dim(C[w']) = d$ y $\mathcal{T}(I) = \bigcup \overline{C[w']}$.

$T := \{(\mathcal{G}_{<_w}(I), \mathcal{G}_{<_w}(\mathrm{in}_w(I)))\}$;
$O := \varnothing$;
Mientras $T \neq O$:
$O := T$;
$T := T \cup \texttt{Vecinos}(T)$.

Referencias

1. Bogart, T.; Jensen, A. N.; Speyer, D.; Sturmfels, B.; Thomas, R. R.: Computing tropical varieties. J. Symbolic Comput. 42 (2007), no. 1-2, 54–73.
2. Bieri, R.; Groves, J. R. J.: A rigidity property for the set of all characters induced by valuations. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), no. 2, 425–434.
3. Maclagan, D.; Sturmfels, B.: Introduction to tropical geometry. Graduate Studies in Mathematics, 161. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. xii+363 pp. ISBN: 978-0-8218-5198-2
4. Sturmfels, B. Solving System of Polynomial Equations. CBMS No. 97. American Math. Society, Providence. (2002)
5. Einsiedler, M. y Kapranov, M. y Lind, D. Non-Archimedean amoebas and tropical varieties. J. Reine Angew. Math. 601 (2006), 139–157.