Curso: Degeneraciones Tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Septiembre 7 2022

Contenido

Aplicación: Pertenencia a un ideal

El siguiente Corolario muestra la utilidad de bases de Gröbner para resolver el problema de la pertenencia a un ideal:

Corolario (Corolario 2.2.4, HH)

Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *es una base de Gröbner para* $I = (g_1, \ldots, g_s)$ *con respeto a* $<$. *Entonces,* $f \in I$ *si y solo si el resto único de* f *con respeto a* $\mathcal{G}$ *es cero.*

Aplicación: Pertenencia a un ideal

El siguiente Corolario muestra la utilidad de bases de Gröbner para resolver el problema de la pertenencia a un ideal:

Corolario (Corolario 2.2.4, HH)

Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *es una base de Gröbner para* $I = (g_1, \ldots, g_s)$ *con respeto a* $<$. *Entonces,* $f \in I$ *si y solo si el resto único de* f *con respeto a* $\mathcal{G}$ *es cero.*

Tarea 1

Muestra el Corolario 2.2.4.

Ejercicio 1

¿Conoces algún problema que se puede reformular como el problema de la pertenencia a un ideal? Si no, da le una búsqueda en google.

Base de monomios estándar

Sea $\mathrm{Mon}(S)$ el conjunto de monomios en S y $\mathrm{Mon}(\mathrm{in}_<(I))$ el conjunto de monomios en $\mathrm{in}_<(I)$ para un ideal $I \subset S$ y $<$ un orden monomial.

Teorema (Macaulay, Teorema 6.1.4, HH)

El conjunto $\mathbb{B}_< := Mon(S) \setminus Mon(\mathrm{in}_<(I)$ es una k-base de S/I. Se llama la base de monomios estándar.

Base de monomios estándar

Sea $\mathrm{Mon}(S)$ el conjunto de monomios en S y $\mathrm{Mon}(\mathrm{in}_<(I))$ el conjunto de monomios en $\mathrm{in}_<(I)$ para un ideal $I \subset S$ y $<$ un orden monomial.

Teorema (Macaulay, Teorema 6.1.4, HH)

El conjunto $\mathbb{B}_< := Mon(S) \setminus Mon(\mathrm{in}_<(I)$ es una k-base de S/I. Se llama la base de monomios estándar.

Prueba: Sea $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una $<$-base de Gröbner de I y $f \in S$. **Lema 2.2.3** implica que f tiene un resto único f' con respecto a G. Además $f \mod I = f' \mod I$ y ningún monomio en $\mathrm{supp}(f')$ es divisible por algún $\mathrm{in}_<(g_i)$. Por lo tanto, $\mathbb{B}_<$ es un sistema de generadores de S/I como espacio vectorial.

Base de monomios estándar

Sea $\mathrm{Mon}(S)$ el conjunto de monomios en S y $\mathrm{Mon}(\mathrm{in}_<(I))$ el conjunto de monomios en $\mathrm{in}_<(I)$ para un ideal $I \subset S$ y $<$ un orden monomial.

Teorema (Macaulay, Teorema 6.1.4, HH)

El conjunto $\mathbb{B}_< := Mon(S) \setminus Mon(\mathrm{in}_<(I)$ es una k-base de S/I. Se llama la base de monomios estándar.

Prueba: Sea $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una $<$-base de Gröbner de I y $f \in S$. **Lema 2.2.3** implica que f tiene un resto único f' con respecto a G. Además $f \mod I = f' \mod I$ y ningún monomio en $\mathrm{supp}(f')$ es divisible por algún $\mathrm{in}_<(g_i)$. Por lo tanto, $\mathbb{B}_<$ es un sistema de generadores de S/I como espacio vectorial.

Supongamos que existe un conjunto $\{u_1, \ldots, u_r\} \subset \mathbb{B}_<$ y $a_1, \ldots, a_r \in k^*$ tal que $h = \sum_{i=1}^r a_i u_i \in I$. Podemos suponer que $\mathrm{in}_<(h) = u_1$, lo cual implica $u_1 \in \mathrm{Mon}(\mathrm{in}_<(I))$, una contradicción. ■

La función de Hilbert e ideales iniciales

Dado un anillo graduado de forma S/I recuerda su función de Hilbert $\mathcal{H}(S/I,\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que se puede presentar por el polinomio de Hilbert $H_{S/I}(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

Ejemplo

Recuerda, $\mathcal{H}(k[x_1,\dots,x_n],d) = \binom{n+d-1}{d}$.

La función de Hilbert e ideales iniciales

Dado un anillo graduado de forma S/I recuerda su función de Hilbert $\mathcal{H}(S/I, \cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que se puede presentar por el polinomio de Hilbert $H_{S/I}(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

Ejemplo

Recuerda, $\mathcal{H}(k[x_1, \dots, x_n], d) = \binom{n+d-1}{d}$.

Ejercicio 2

Sean $f = x_1 - x_2$ *y* $g = x_1 - x_3$ *en* $S = k[x_1, x_2, x_3]$ *y* $< = <_{lex}$.

1. *¿Cuál es la función de Hilbert de* $S/(f, g)$ *y de* $S/(\mathrm{in}_<(f), \mathrm{in}_<(g))$*?*
2. *Con* $I = (f, g)$, *¿cuál es la función de Hilbert de* $S/\mathrm{in}_<(I)$*?*

La función de Hilbert e ideales iniciales

Corolario (Corolario 6.1.5 en HH)

Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo y $<$ un orden monomial en S. Entonces, S/I y $S/\operatorname{in}_<(I)$ tienen la misma función de Hilbert:

$$\mathcal{H}(S/I, i) = \mathcal{H}(S/\operatorname{in}_<(I), i), \quad \textit{para todas} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

La función de Hilbert e ideales iniciales

Corolario (Corolario 6.1.5 en HH)

Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo y $<$ un orden monomial en S. Entonces, S/I y $S/\operatorname{in}_<(I)$ tienen la misma función de Hilbert:

$$\mathcal{H}(S/I, i) = \mathcal{H}(S/\operatorname{in}_<(I), i), \quad \textit{para todas} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Prueba: Los monomios estándar $\mathbb{B}_<$ son una base graduada para S/I y $S/\operatorname{in}_<(I)$. ■

Criterio para bases de Gröbner

Corolario (Corolario 6.1.6 en HH)

Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo y $<$ un orden monomial en S. Sea $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ es sistema de generadores homogéneos de I y $J = (\mathrm{in}_<(g_1), \dots, \mathrm{in}_<(g_s))$.

Criterio para bases de Gröbner

Corolario (Corolario 6.1.6 en HH)

Sea $I \subset S$ *un ideal homogéneo y* $<$ *un orden monomial en* S*. Sea* $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *es sistema de generadores homogéneos de* I *y* $J = (\mathrm{in}_<(g_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_s))$.

Entonces, G *es una* $<$*-base de Gröbner de* I *si y solo si* S/I *y* S/J *tienen la misma función de Hilbert.*

Criterio para bases de Gröbner

Corolario (Corolario 6.1.6 en HH)

Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo y $<$ un orden monomial en S. Sea $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ es sistema de generadores homogéneos de I y $J = (\mathrm{in}_<(g_1), \dots, \mathrm{in}_<(g_s))$.

Entonces, G es una $<$-base de Gröbner de I si y solo si S/I y S/J tienen la misma función de Hilbert.

Prueba: Tenemos $J \subset \mathrm{in}_<(I)$. Por lo tanto

$$\mathcal{H}(S/J, i) \geq \mathcal{H}(S/I, i) \quad \text{para todas} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

La desigualdad es una igualdad si y solo si $J = \mathrm{in}_<(I)$. ■

Bases de Gröbner reducidas, minimales y universales

Definición

Una base de Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *se llama*

- *reducida si satisface:*
  1. *el coeficiente principal de* g_i *es* 1 *para* $1 \leq i \leq s$,
  2. *si* $i \neq j$ *ningún monomio de* g_j *es divisible por* $in_<(g_i)$;

Bases de Gröbner reducidas, minimales y universales

Definición

Una base de Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *se llama*

- *reducida si satisface:*
  1. *el coeficiente principal de* g_i *es* 1 *para* $1 \leq i \leq s$*,*
  2. *si* $i \neq j$ *ningún monomio de* g_j *es divisible por* $in_<(g_i)$*;*
- *minimal si ningún monomio en el conjunto* $\{in_<(g) : g \in G\}$ *es redundante;*

Bases de Gröbner reducidas, minimales y universales

Definición

Una base de Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *se llama*

- *reducida si satisface:*
  1. *el coeficiente principal de* g_i *es* 1 *para* $1 \leq i \leq s$,
  2. *si* $i \neq j$ *ningún monomio de* g_j *es divisible por* $in_<(g_i)$;
- *minimal si ningún monomio en el conjunto* $\{in_<(g) : g \in G\}$ *es redundante;*
- *universal si es una base de Gröbner para cada orden monomial* $<$ *simulaneamente.*

Bases de Gröbner reducidas, minimales y universales

Definición

Una base de Gröbner $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ se llama

- *reducida si satisface:*
  1. *el coeficiente principal de g_i es 1 para $1 \leq i \leq s$,*
  2. *si $i \neq j$ ningún monomio de g_j es divisible por $in_<(g_i)$;*
- *minimal si ningún monomio en el conjunto $\{in_<(g) : g \in G\}$ es redundante;*
- *universal si es una base de Gröbner para cada orden monomial $<$ simulaneamente.*

Teorema (Teorem 2.2.7 y Corolario 2.2.8)

Para cada ideal I y cada orden monomial $<$ existe una única base de Gröbner reducida, se denota $\mathcal{G}_{\mathrm{red}}(I;<)$. Además, para dos ideal I y J tenemos

$$I = J \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}_{\mathrm{red}}(I;<) = \mathcal{G}_{\mathrm{red}}(J;<).$$

S-polinomios

Sean $f, g \in S$ y c_f, c_g los coeficientes de $in_<(f), in_<(g)$ en f, g, y sea $\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))$ el *mínomo común múltiplo* de $in_<(f)$ y $in_<(g)$.

El *S-polinomio* de f y g es

$$S(f,g) := \frac{\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))}{c_f\, in_<(f)} f - \frac{\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))}{c_g\, in_<(g)} g.$$

S-polinomios

Sean $f, g \in S$ y c_f, c_g los coeficientes de $in_<(f), in_<(g)$ en f, g, y sea $\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))$ el *mínomo común múltiplo* de $in_<(f)$ y $in_<(g)$.

El S-polinomio de f y g es

$$S(f,g) := \frac{\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))}{c_f\, in_<(f)} f - \frac{\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))}{c_g\, in_<(g)} g.$$

Ejercicio 3

Sean $f = x_1x_4 - x_2x_3$ *y* $g = x_4x_7 - x_5x_6$ *y* $< = <_{lex}$. *Entonces,* $in_<(f) = x_1x_4$ *y* $in_<(g) = x_4x_7$. *Calcula el* S*-polinomio* $S(f,g)$.

S-polinomios

Sean $f, g \in S$ y c_f, c_g los coeficientes de $in_<(f), in_<(g)$ en f, g, y sea $\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))$ el *mínomo común múltiplo* de $in_<(f)$ y $in_<(g)$.

El *S-polinomio* de f y g es

$$S(f,g) := \frac{\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))}{c_f\, in_<(f)} f - \frac{\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g))}{c_g\, in_<(g)} g.$$

Ejercicio 3

Sean $f = x_1x_4 - x_2x_3$ y $g = x_4x_7 - x_5x_6$ y $<=<_{lex}$. Entonces, $in_<(f) = x_1x_4$ y $in_<(g) = x_4x_7$. Calcula el S-polinomio $S(f,g)$.

Pues $\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g)) = x_1x_4x_7$ y

$$S(f,g) \;=\; \frac{x_1x_4x_7}{x_1x_4} f - \frac{x_1x_4x_7}{x_4x_7} g = x_7 f - x_1 g = -x_2x_3x_7 + x_1x_5x_6.$$

Entonces, $S(f,g) \in (f,g)$ pero $in_<(S(f,g)) \notin (in_<(f), in_<(g))$.

El criterio de Buchberger

Tarea 2

Sean $0 \neq f, g \in S$ *tal que* $\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g)) = in_<(f) in_<(g)$ *(se dice* $in_<(f)$ *y* $in_<(g)$ *son coprimos). Entonces,* $S(f, g)$ *reduce a cero con respeto a* $\{f, g\}$*.*

El criterio de Buchberger

Tarea 2

Sean $0 \neq f, g \in S$ *tal que* $\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g)) = in_<(f) in_<(g)$ *(se dice* $in_<(f)$ *y* $in_<(g)$ *son coprimos). Entonces,* $S(f, g)$ *reduce a cero con respeto a* $\{f, g\}$*.*

El siguiente es el resultado más importante el la teoría de Gröbner:

Teorema (El criterio de Buchberger, Teorema 2.3.2 en HH)

Sea I *un ideal no cero de* S *y* $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *un conjunto de generadores de* I*. Entonces* $\mathcal{G}$ *es una base de Gröbner si y solo si*

$$\forall\ i \neq j, \quad S(g_i, g_j) \quad \textit{reduce a cero con respeto a } \mathcal{G}. \tag{0.1}$$

El criterio de Buchberger

Tarea 2

Sean $0 \neq f, g \in S$ *tal que* $\mathrm{mcm}(in_<(f), in_<(g)) = in_<(f)in_<(g)$ *(se dice* $in_<(f)$ *y* $in_<(g)$ *son coprimos). Entonces,* $S(f,g)$ *reduce a cero con respeto a* $\{f,g\}$*.*

El siguiente es el resultado más importante el la teoría de Gröbner:

Teorema (El criterio de Buchberger, Teorema 2.3.2 en HH)

Sea I *un ideal no cero de* S *y* $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ *un conjunto de generadores de* I*. Entonces* $\mathcal{G}$ *es una base de Gröbner si y solo si*

$$\forall\ i \neq j, \quad S(g_i, g_j) \quad \textit{reduce a cero con respeto a } \mathcal{G}. \tag{0.1}$$

Prueba:

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{G}$ es una base de Gröbner cada $f \in I$ reduce a cero con respeto a $\mathcal{G}$ (**Corolario 2.2.4**). Entonces, $S(g_i, g_j) \in I$ reduce a cero.

$\Leftarrow$ Ver el libro.

El algoritmo de Buchberger

Input: $I = (g_1, \ldots, g_s)$ un ideal y $<$ un orden monomial;
Output: una base de Gröbner para I y $<$;

Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ y $N = \{1, \ldots, s\}$

1. calcula $S(g_i, g_j)$ para todos $i \neq j \in N$;
2. si $S(g_i, g_j)$ reduce a cero con respeta a $\mathcal{G}$, **retorno** $\mathcal{G}$;
   ($\mathcal{G}$ es una base de Gröbner según el criterio de Buchberger)
3. si existe un $S(g_i, g_j)$ con resto g_{s+1} con respeto a $\mathcal{G}$, sustituye
   $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \{g_{s+1}\}$,
   $N \leftarrow N \cup \{s+1\}$,
   y regresa al paso **(1)**.

Mejorar el algoritmo de Buchberger

En general no es necessario calcular *todos* los S-polinomios en el algoritmo de Buchberger.

Lema (Corolario 2.3.4 en HH)

Sean $0 \neq g_1, \ldots, g_s$ *polinomios tal que* $in_<(g_i)$ *son coprimos para todos* $i \neq j$. *Entonces,* $\{g_1, \ldots, g_s\}$ *es una base de Gröbner para* $I = (g_1, \ldots, g_s)$.

Tarea: Computación en Macaulay2

1. Instala `Macaulay2` en tu computadora. Para Windows: `https://gist.github.com/eivan/cab0b0a29eebd91d767ea6ad7448368e`
   Alternativamente hay una versión en línea:
   `http://habanero.math.cornell.edu:3690/`
2. En M2: define un anillo de polinomios y especifica un orden de monomios (ver `MonomialOrder`);
3. Usando las funciones `lcm`[1] y `leadTerm`[2] calula los S-polinomios;
4. Usando la función `gb` calcula una base de Gröbner;

Por ejemplo, para $I = (x_1x_3 - x_2^2 - 1, x_2x_4 - x_3 - 1, x_3x_5 - x_4^2 - 1, x_4x_6 - x_5 - 1, x_1x_5 - x_6^2 - 1, x_2x_6 - x_1 - 1) \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$.

[1] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/_lcm.html`

[2] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/_lead__Term.html`

§3 Degeneraciones de Gröbner

Contenido

Vectores de peso

Sea $w \in \mathbb{R}^n$ (un vector de peso) y $f = \sum_{i=1}^m c_i x^{a_i} \in S$. Definimos el w-grado de f $\deg_w(f) = \max\{\langle a_i, w\rangle : c_i \neq 0\}$. La forma inicial de f con respeto a w:

$$in_w(f) = \sum_{j:\langle w,a_j\rangle = \deg_w(f)} c_j x^{a_j}.$$

Para un ideal $I \subset S$ el ideal inicial de I con respeto a w es $in_w(I) := (in_w(f) : 0 \neq f \in I)$.

Vectores de peso

Sea $w \in \mathbb{R}^n$ (un vector de peso) y $f = \sum_{i=1}^m c_i x^{a_i} \in S$. Definimos el w-grado de f $\deg_w(f) = \max\{\langle a_i, w\rangle : c_i \neq 0\}$. La forma inicial de f con respeto a w:

$$in_w(f) = \sum_{j:\langle w, a_j\rangle = \deg_w(f)} c_j x^{a_j}.$$

Para un ideal $I \subset S$ el ideal inicial de I con respeto a w es $in_w(I) := (in_w(f) : 0 \neq f \in I)$.

Ejercicio 4

Muestra que $in_w(fg) = in_w(f) in_w(g)$ para cada $f, g \in S$ y $w \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo

El ideal inicial con respeto a un vector de peso no necesariamente es generado de monomios. Por ejemplo, si $in_{(2,1)}(x_1 - x_2^2) = x_1 - x_2^2$.

Tarea: Espacio lineal

Tarea 3

1. *Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo. Toma $w = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ y muestra que $in_w(I) = I$.*
2. *Para un ideal $I \subset S$ definimos su espacio lineal:*

$$\mathcal{L}(I) := \{w \in \mathbb{R}^n : in_x(I) = I\}.$$

Muestra que $\mathcal{L}(I)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. ¿Puedes dar un ejemplo de un ideal cuyos espacio lineal tiene dimensión más que uno?

Orden monomial y vector de peso

Sea $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ y $<$ un orden monomial para *romper empates*. Definimos el orden monomial $<_w$:

$$x^a <_w x^b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) < 0, & \text{o} \\ \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) = 0 & \text{y } x^a < x^b. \end{cases}$$

Orden monomial y vector de peso

Sea $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ y $<$ un orden monomial para *romper empates*. Definimos el orden monomial $<_w$:

$$x^a <_w x^b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) < 0, & \text{o} \\ \sum_{i=1}^n w_i(a_i - b_i) = 0 & \text{y } x^a < x^b. \end{cases}$$

Ejercicio 5

Si $< \in \{<_{lex}, <_{revlex}\}$ *y* $w = (1, \ldots, 1)$, *¿cuál es el orden* $<_w$*?*

Tarea 4

Prueba que para cada ideal $I \subset S$ *y cada* $w \in \mathbb{R}^n$ *tenemos* $in_<(in_w(I)) = in_{<_w}(I)$. *Se dice: el orden* $<_w$ *refine el vector de peso* w.

Referencias §2

1. Herzog, Jürgen; Hibi, Takayuki: Monomial ideals. Graduate Texts in Mathematics, 260. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. xvi+305 pp. ISBN: 978-0-85729-105-9
2. Bernd Sturmfels: Gröbner bases and convex polytopes, Volume 8 of American Mathematical Soc.1996