Tarea 2 - Teoría de Gröbner

Lara Bossinger

Septiembre 2022

Sea $S = K[x_1, \dots, x_n]$, donde K es un campo. Para $a, b \in \mathbb{N}^n$ escribimos $x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ y $x^b = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$. Decimos que x^a **divide** x^b si $a_i \geq b_i$ para todas $i \in [n] = \{1, \dots, n\}$.

Tarea 1 (Lema de Dickson, Lema 2.1.4 HH)**.** *Sea $\mathcal{M}$ un subconjunto no vació de los monomios de S. Un elemento $x^a \in \mathcal{M}$ es* **minimal en** *$\mathcal{M}$ si para cada $x^b \in \mathcal{M}$ que divide x^a tenemos $x^a = x^b$. Escribimos $\mathcal{M}_{\min} \subset \mathcal{M}$ para el conjunto de elementos minimales de $\mathcal{M}$.*

Prueba que $\mathcal{M}_{\min}$ es finito para cada $\mathcal{M}$.

Tarea 2 (Lema 2.1.7, HH)**.** *Sea $<$ un orden monomial en S. Prueba que para ningún $x^a \in Mon$ existe una secuencia infinita descendiente de la forma $x^a = x^{a_0} > x^{a_1} > x^{a_2} > \dots$*

Tarea 3 (Finalizar la prueba del Teorema 2.2.1, HH)**.** *Verifica que la secuencia nos da una expresión estándar de f con respeto a $g_1, \dots, g_s$.*

Tarea 4 (Lema 2.3.1 HH)**.** *Sean $0 \neq f, g \in S$ tal que el mínimo común múltiple $mcm(in_<(f), in_<(g)) = in_<(f)in_<(g)$ (se dice $in_<(f)$ y $in_<(g)$ son* **coprimos***). Entonces, $S(f, g)$ reduce a cero con respeto a $\{f, g\}$.*

Tarea 5 (Cálculos en `Macaulay2`)**.**

1. *Instala `Macaulay2` en tu computadora. Para Windows: `https://gist.github.com/eivan/cab0b0a29eebd91d767ea6ad7448368e` Alternativamente hay una versión en línea: `http://habanero.math.cornell.edu:3690/`*
2. *En M2: define un anillo de polinomios y especifica un orden de monomios (ver `MonomialOrder`);*
3. *Usando las funciones `lcm`[1] y `leadTerm`[2] calula los S-polinomios;*
4. *Usando la función `gb` calcula una base de Gröbner;*
5. *Por ejemplo, para $I = (x_1x_3 - x_2^2 - 1, x_2x_4 - x_3 - 1, x_3x_5 - x_4^2 - 1, x_4x_6 - x_5 - 1, x_1x_5 - x_6^2 - 1, x_2x_6 - x_1 - 1) \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$.*

Tarea 6 (Espacio lineal)**.**

1. *Sea $I \subset S$ un ideal homogéneo. Toma $w = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ y muestra que $in_w(I) = I$.*

---

[1] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/_lcm.html`

[2] `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/_lead__Term.html`

2. *Para un ideal $I \subset S$ definimos su espacio lineal:*

$$\mathcal{L}(I) := \{w \in \mathbb{R}^n : in_x(I) = I\}.$$

Muestra que $\mathcal{L}(I)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. ¿Puedes dar un ejemplo de un ideal cuyos espacio lineal tiene dimensión más que uno?

Tarea 7 (Refinar un vector de peso)**.** *Prueba que para cada ideal $I \subset S$ y cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos $in_<(in_w(I)) = in_{<_w}(I)$. Se dice: el orden $<_w$ refine el vector de peso w.*

Tarea 8 (Lema 3.2.1, HH)**.** *Dado $I \subset S$ un ideal y $w \in \mathbb{N}^n$:*

1. *$(fg)^w = f^w g^w$ para todos $f, g \in S$.*

2. *$f^w \in S[t]$ es homogéneo con respecta a la graduación $(w_1, \ldots, w_n, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$.*

3. *Si $f \in S[t]$ es homogéneo, entonces*

$$f \in I \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in I, m \in \mathbb{N} : \; f = t^m g^w.$$

Tarea 9 (Lema 3.2.1, HH)**.** *Si $f \in S[t]$ es homogéneo, entonces $f \in I$ si y solo si existen $g \in I, m \in \mathbb{N}$ tal que $f = t^m g^w$.*

Tarea 10 (Cálculos en `polymake`)**.**

1. *Instala `polymake` en tu computadora (`https://polymake.org`)*

2. *Ver las funciones básicas que tiene, por ejemplo aqui: `https://www.math.ucdavis.edu/~deloera/TEACHING/RMMC2011/polymake_reference.html`*

3. *Usando polymake, verifica Lema 1 para $f = 2x^2y + xy^3 + 4z^4$ y $g = (x - y)(1 + z^2)$. (Puedes proceder como en la prueba y verificar que $New(f \cdot g)$ y $New(f) + New(g)$ tienen los mismos vértices.)*

4. *Usando polymake, verifica que los dos politopos abajo de la Definición 10 son fuertemente isomorfos. (Primero, da les coordenadas)*

Bibliografía

HH Herzog, Jürgen; Hibi, Takayuki: Monomial ideals. Graduate Texts in Mathematics, 260. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. xvi+305 pp. ISBN: 978-0-85729-105-9

St Bernd Sturmfels: Gröbner bases and convex polytopes, Volume 8 of American Mathematical Soc.1996