Tarea 3 - Valuaciones

Lara Bossinger

Septiembre 2022

Tarea 1. *Sea* $V = \langle tx, t^2x, (1+t^4)x\rangle \subset k(t,x)$ *con la graduación* $\deg(f(t)x^a) = a$. *Definimos la valuación extendida*

$$\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \hat{\nu}(f(t)x^a) = (a, \deg(f(t))$$

Muestra (por inducción) que es espacio V^k *tiene* k*-base*

$$t^2x^k, t^3x^k, \dots, t^{4k-4}x^k, (t+t^{4k-3})x^k, t^{4k-2}x^k, (1+t^{4k})x^k.$$

Tarea 2. *Sea* $R = R(V)$ *y* $\Gamma = \Gamma_\nu(V)$. *Entonces para cada* $(m,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ *el siguiente conjunto es finito*

$$\Gamma_{\leq(m,u)} := \{(m',u') \in \Gamma : (m',u') \leq (m,u)\}$$

Tarea 3 (Lema 1, Anderson)**.** *Sea* $R = R(V)$ *y* $\Gamma = \Gamma_\nu(V)$. *Entonces*

1. *Para cada* $(m,u) \in \Gamma$ *el siguiente conjunto es un espacio vectorial de dimensión finita (i.e. cerrado bajo adición)*

$$R_{\leq(m,u)} := \{f \in R : \hat{\nu}(f) \leq (m,u)\}.$$

2. *Para cada* $(m,u), (m',u') \in \Gamma$ *tenemos*

$$R_{\leq(m,u)} \cdot R_{\leq(m',u')} \subseteq R_{\leq(m+m',u+u')}.$$

En particular, $\{R_{\leq(m,u)} : (m,u) \in \Gamma\}$ *es una filtración multiplicativa en* R.

Tarea 4. *Definimos* $R_{<(m,u)}$ *de manera análoga a* $R_{\leq(m,u)}$. *El anillo graduado asociado a la filtración multiplicativa* $\{R_{\leq(m,u)} : (m,u) \in \Gamma\}$ *es*

$$gr_{\hat{\nu}}R := \bigoplus_{(m,u)\in\Gamma} R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}$$

Verifica que $gr_{\hat{\nu}}R$ *es un anillo y que es* Γ*-graduado.*

Tarea 5. *Sea* $R = R(V)$ *un anillo graduado y* k*-dominio,* $k = \bar{k}$*, campo de fracciones* K *y* $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ *una valuación. Definimos* $R_\nu := \{f \in K \setminus \{0\} : \nu(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ *el anillo de la valuación,* $m_\nu := \{f \in K \setminus \{0\} : \nu(f) > 0\} \cup \{0\}$ *su ideal maximal y* $k_\nu = R_\nu/m_\nu$ *el campo residual. Supongamos* $\nu(c) = 0$ *para* $c \in k$ *por lo tanto* $k \subset k_\nu$. *Verifica que*

1. ν *tiene hojas a lo más unidimensionales* $\quad \Leftrightarrow \quad k = k_\nu$

2. *Si* ν *es de rango completo, tiene hojas a lo más unidimensionales.*

3. *Si* ν *tiene hojas a lo más unidimensionales, entonces* $gr_\nu R \cong k[\Gamma_\nu]$.