Tarea 3 - Valuaciones

Lara Bossinger

Octubre 2022

Tarea 1. *Sea* $V = \langle tx, t^2x, (1+t^4)x\rangle \subset k(t,x)$ *con la graduación* $\deg(f(t)x^a) = a$. *Definimos la valuación extendida*

$$\hat{\nu} : R(V) \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \quad \hat{\nu}(f(t)x^a) = (a, \deg(f(t)))$$

Muestra (por inducción) que es espacio V^k *tiene* k*-base*

$$t^2x^k, t^3x^k, \ldots, t^{4k-4}x^k, (t+t^{4k-3})x^k, t^{4k-2}x^k, (1+t^{4k})x^k.$$

Solución: Empezamos con $k=2$ que contiene por definición

$$\begin{array}{cccccccc} & (tx)^2, & (tx)(t^2x), & (tx)(1+t^4)x, & (t^2x)^2, & (t^2x)(1+t^4)x, & (1+t^4)^2x^2 \\ = & t^2x^2, & t^3x^2, & (t+t^5)x^2, & t^4x^2, & (t^2+t^6)x^2, & (1+2t^4+t^8)x^2 \end{array}$$

En particular, el siguiente conjunto es una k-base de V^2

$$t^2x^2,\ t^3x^2,\ t^4x^2,\ (t+t^5)x^2,\ t^6x^2,\ (1+t^8)x^2$$

lo cual coincide con la afirmación. Supongamos entonces que se cumple la afirmación para algún $k > 2$ fijo. Para el espacio V^{k+1} obtenemos un conjunto de generadores multiplicando la base de V^k por elementos de $V^1 = \langle tx, t^2x, (1+t^4)x\rangle$.

$$t^2x^k, t^3x^k, \ldots, t^{4k-4}x^k, (t+t^{4k-3})x^k, t^{4k-2}x^k, (1+t^{4k})x^k.$$

Obtenemos los monomios $t^3x^{k+1}, \ldots, t^{4(k+1)-4}x^{k+1}$ multiplicando los siguientes monomios $t^2x^k, t^3x^k, \ldots, t^{4k-4}x^k, t^{4k-2}x^k$ por tx o t^2x. Luego $tx(t+t^{4k-3})x^k = (t^2+t^{4(k+1)-6})x^{k+1}$, por lo tanto $t^2x^{k+1} \in V^{k+1}$. De manera similar tenemos $t^2(1+t^{4k})x^{k+1} = t^2x^{k+1} + t^{4(k+1)-2}x^{k+1} \in V^{k+1}$, por lo tanto $t^{4(k+1)-2}x^{k+1} \in V^{k+1}$.

P.D. $(t+t^{4(k+1)-3})x^{k+1}, (1+t^{4(k+1)})x^{k+1} \in V^{k+1}$.

Calculamos $(1+t^4)(t+t^{4k-3})x^{k+1} = (t+t^5+t^{4k-3}+t^{4(k+1)-3})x^{k+1}$. Dado que ya tenemos $t^5x^{k+1}, t^{4k-3}x^{k+1} \in V^{k+1}$ implica $(t+t^{4(k+1)-3})x^{k+1} \in V^{k+1}$. De manera similar calculamos $(1+t^4)(1+t^{4k})x^{k+1} = (1+t^4+t^{4k}+t^{4(k+1)})x^{k+1}$. Dado que ya tenemos $t^4x^{k+1}, t^{4k}x^{k+1} \in V^{k+1}$ nos queda $(1+t^{4(k+1)})x^{k+1} \in V^{k+1}$. $\square$

Tarea 2. *Sea* $R = R(V)$ *y* $\Gamma = \Gamma_\nu(V)$. *Entonces para cada* $(m,u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ *el siguiente conjunto es finito*

$$\Gamma_{\leq(m,u)} := \{(m', u') \in \Gamma : (m', u') \leq (m,u)\}$$

Solución: Recuerda que $\Gamma = \{(m, \nu(f)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : f \in V^m \setminus \{0\}\}$. Primero nota que $\nu(V^m)$ es un conjunto finito para cada $m \geq 0$ porque $\nu(c) = 0$ para cada $c \in k$. Por lo tanto el conjunto

$$\Gamma_m := \left\{(m, \nu(f)) \in \{m\} \times \mathbb{Z}^d : f \in V^m \setminus \{0\}\right\}$$

es finito. El conjunto $\Gamma_{\leq(m,u)}$ por lo tanto es la unión de dos conjuntos finitos:

$$\left\{(m', \nu(f)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : \begin{array}{c} m' < m, \\ f \in V^{m'} \setminus \{0\} \end{array}\right\} \quad y \quad \left\{(m, \nu(f)) \in \{m\} \times \mathbb{Z}^d : \begin{array}{c} \nu(f) \succ u, \\ f \in V^m \setminus \{0\} \end{array}\right\} \subset \Gamma_m$$

□

Tarea 3 (Lema 1, Anderson)**.** *Sea* $R = R(V)$ *y* $\Gamma = \Gamma_\nu(V)$. *Entonces*

1. *Para cada* $(m,u) \in \Gamma$ *el siguiente conjunto es un espacio vectorial de dimensión finita (i.e. cerrado bajo adición)*

$$R_{\leq(m,u)} := \{f \in R : \hat{\nu}(f) \leq (m,u)\}.$$

2. *Para cada* $(m,u), (m',u') \in \Gamma$ *tenemos*

$$R_{\leq(m,u)} \cdot R_{\leq(m',u')} \subseteq R_{\leq(m+m',u+u')}.$$

En particular, $\{R_{\leq(m,u)} : (m,u) \in \Gamma\}$ *es una filtración multiplicativa en* R.

Solución:

1. Es suficiente verificar que $R_{\leq(m,u)}$ es cerrado bajo la adición porque luego junto con el hecho que $\Gamma_{\leq(m,u)}$ es un conjunto finito podemos deducir que $R_{\leq(m,u)}$ es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces, sean $f, g \in R_{\leq(m,u)}$. Sin perder de generalidad podemos suponer que ambos son de grado m. Recuerda que $\nu(f+g) \succeq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$. Por lo tanto en el orden $\leq$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ tenemos

$$\hat{\nu}(f+g) = (m, \nu(f+g)) \leq (m, \min{}_{\prec}\{\nu(f), \nu(g)\}) \leq \max{}_{\leq}\{\hat{\nu}(f), \hat{\nu}(g)\}$$

   Como tanto $\hat{\nu}(f)$ como $\hat{\nu}(g)$ pertenecen a $R_{\leq(m,u)}$ concluimos que también $\hat{\nu}(f+g) \in R_{\leq(m,u)}$.

2. Sean $f \in R_{\leq(m,u)}$ y $g \in R_{\leq(m',u')}$, sin perder de generalidad supongamos que el grado de f es m y el grado de g es m'. Calculamos

$$\hat{\nu}(fg) = (m, \nu(f)) + (m', \nu(g)) = (m+m', \nu(f) + \nu(g)) \leq (m+m', u+u').$$

   La última desigualdad es válida dado que $\leq$ es un buen orden en el sentido que $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ con $\leq$ es un grupo abeliano ordenado.

□

Tarea 4. *Definimos $R_{<(m,u)}$ de manera análoga a $R_{\leq(m,u)}$. El anillo graduado asociado a la filtración multiplicativa $\{R_{\leq(m,u)} : (m,u) \in \Gamma\}$ es*

$$gr_{\hat{\nu}}R := \bigoplus_{(m,u)\in\Gamma} R_{\leq(m,u)}/R_{<(m,u)}$$

Verifica que $gr_{\hat{\nu}}R$ es un anillo y que es Γ-graduado.

Tarea 5. *Sea $R = R(V)$ un anillo graduado y k-dominio, $k = \bar{k}$, campo de fracciones K y $\nu : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación. Definimos $R_\nu := \{f \in K \setminus \{0\} : \nu(f) \geq 0\} \cup \{0\}$ el anillo de la valuación, $m_\nu := \{f \in K \setminus \{0\} : \nu(f) > 0\} \cup \{0\}$ su ideal maximal y $k_\nu = R_\nu/m_\nu$ el campo residual. Supongamos $\nu(c) = 0$ para $c \in k$ por lo tanto $k \subset k_\nu$. Verifica que*

1. *ν tiene hojas a lo más unidimensionales $\quad\Leftrightarrow\quad k = k_\nu$*
2. *Si ν es de rango completo, tiene hojas a lo más unidimensionales.*
3. *Si ν tiene hojas a lo más unidimensionales, entonces $gr_\nu R \cong k[\Gamma_\nu]$.*

Solución:

1. Supongamos $k \neq k_\nu$. Lo cual es el caso si y solo si existe $f \in K - k$ tal que $\nu(f) = 0$. En particular, para cada $g \in R(V)$ tenemos $\nu(fg) = \nu(g)$ lo cual implica

   $$g \in R_{\leq\nu(g)}/R_{<\nu(g)} \quad\Rightarrow\quad f + g \in R_{\leq\nu(g)}/R_{<\nu(g)}.$$

   Por lo tanto, ν no tiene hojas unidimensionales. Si al revés $k = k_\nu$ entonces no existe $f \in K - k$ con $\nu(f) = 0$. Si tenemos una hoja $R_{\leq a}/R_{<a}$ con dos elementos $f, g \in R$ con $\nu(f) = \nu(g) = a$ que nos da $\nu(f^{-1}g) = -a + a = 0$. Entonces $f^{-1}g \in k = k_\nu$ y $R_{\leq a}/R_{<a}$ es unidimensional.

2. Vamos a utilizar una versión refinida de la desigualdad de Abhyankar (ver e.g. el Teorema 6.6.7 en Swanson y Huneke. Integral Closures of Ideals, Rings, and Modules). Denota por tr-deg(ν) el grado de transcendencia de la extensión de campos $k \subset k_\nu$. Tenemos

   $$r(\nu) + \text{tr-deg}(\nu) \leq \dim R.$$

   Supongamos que ν no tiene hojas unidimensionales. Por (1) sabemos que en este caso $k \neq k_\nu$ y por lo tanto tr-deg$(\nu) > 0$. Entonces, la desigualdad de Abhyankar implica que $r(\nu) < \dim R$.

3. Tenemos $\mathrm{gr}_\nu R = \bigoplus_{a\in\Gamma_\nu} R_{\leq a}/R_{<a}$. Por definición de Γ_ν sabemos que $\dim R_{\leq a}/R_{<a} \geq 0$ para $a \in \Gamma_v$ (porque para cada $a \in \Gamma_\nu$ existe $f \in R$ con $\nu(f) = a$). Por lo tanto $\mathrm{gr}_\nu R \cong k[\Gamma_\nu]$.

□